

# **ESTRUCTURA DE COSTOS DE UN SERVICIO DE TRANSPORTE PÚBLICO URBANO DE PASAJEROS**

**J. Enrique Fernández L., Joaquín de Cea Ch.**

Profesores Titulares Depto. Ingeniería de Transporte  
Pontificia Universidad Católica de Chile

**Louis de Grange C.**

Ingeniero Fernández y De Cea Ingenieros Ltda.

## **RESUMEN**

En este trabajo se plantea un modelo microeconómico que permite definir las principales características de la estructura de costos de un sistema de transporte público de pasajeros. El trabajo considera que los servicios de transporte de pasajeros son producidos conjuntamente por los operadores de los vehículos, o proveedores del servicio, y los usuarios, que aportan como factores de producción sus tiempos de acceso, espera y viaje.

Se especifica la función de producción y la estructura de costos del sistema, para los casos sin y con congestión y se analizan las características respecto a la presencia de economías de escala. En ausencia de congestión, se demuestra que siempre existen economías de escala desde la perspectiva social de la producción del servicio; sin embargo, el grado de dichas economías decrece al aumentar el nivel de producción, tendiendo en el límite al valor 1 correspondiente a rendimientos constantes. Por otra parte, se muestra que en presencia de congestión, existen economías de escala sólo dentro de un rango acotado de niveles de producción, concluyéndose que la presencia de niveles significativos de congestión inducen deseconomías de escala en el sistema.

## **1. INTRODUCCIÓN**

En la literatura especializada, los resultados obtenidos por la gran mayoría de los autores, indican la presencia de economías de escala en la provisión de servicios de transporte público, entre los que destacan Mohring (1972), Janson (1980), Kerin (1992) y Jara (1997). Este resultado es consecuencia principalmente de considerar el tiempo de espera de los usuarios en las paradas, ya que un vehículo adicional que se agrega al servicio producto de una mayor demanda, genera una disminución en dichos tiempos. Sin embargo, en ninguno de los estudios analizados se considera de manera explícita el efecto que en muchos casos puede tener la congestión generada por la incorporación de un nuevo vehículo en el servicio (buses). De hecho, la disminución marginal en el tiempo de espera de los pasajeros al incluir un nuevo vehículo al servicio es decreciente, mientras que el aumento marginal en el tiempo de viaje es creciente en presencia de congestión.

En el presente trabajo se desarrolla un modelo microeconómico que define la estructura de costo de un servicio de buses desde una perspectiva social (operadores más usuarios), considerando variables y parámetros relevantes en la provisión del servicio, como son los factores productivos (buses, mano de obra y terminales), capacidad de los buses y recursos de tiempo aportados por los usuarios. En la sección 2 se definen las características operacionales del servicio ofrecido y principales variables usadas en la modelación; en la sección 3 se deduce la estructura de costos del operador mientras que en la sección 4 se

define la estructura de costos de los usuarios del servicio. En la sección 5 se analiza la estructura de costos del sistema (operadores y usuarios), incorporando de manera explícita la congestión y analizando la presencia de economías de escala. Finalmente, en la sección 6 se presentan las conclusiones que se deducen del desarrollo expuesto.

## 2. CARACTERÍSTICAS DEL SERVICIO

Se considerará una flota de buses que ofrece el servicio en una ruta de largo  $L$ , la que está compuesta por un total de  $n$  arcos y  $n + 1$  sucesivos durante su recorrido, como se grafica en la Figura 1:



**Figura 1: Estructura del Recorrido Ofrecido**

A continuación se define el conjunto de variables y parámetros que se incluyen dentro del modelo:

$Y$ : número total de viajes sobre el recorrido por unidad de tiempo (demanda inelástica)

$T_v$ : tiempo de viaje sobre la ruta de largo  $L$  sin considerar las paradas intermedias

$t$ : tiempo que tarda un pasajero en subir y bajar del bus

$t_c$ : tiempo total del ciclo del recorrido de un bus

$l$ : largo promedio de viaje de los pasajeros

$L$ : largo total de la ruta recorrida por los vehículos de la flota

$k$ : capacidad de cada bus de la flota (pasajeros por vehículo)

$B$ : tamaño de flota o número de vehículos en operación

$f$ : frecuencia ofrecida por la flota de vehículos

## 3. ESTRUCTURA DE COSTO DE OPERADORES

Para determinar la estructura de costos de los operadores de servicios de buses, se debe primero determinar las características de producción de dicho servicio; de esta forma, a partir de la función de gasto de los operadores se obtiene la respectiva función de costo. En Fernández, de Cea y de Grange (1999) se deriva una función de producción para un servicio de buses imponiendo la condición de igualar la frecuencia que es capaz de ofrecer el operador de un servicio ( $f^o = B/t_c$ ) con la frecuencia demandada por los usuarios ( $f^d = \alpha Y/k$ ). Considerando que el tiempo de ciclo de un bus  $t_c$  va a ser la suma del tiempo de viaje en los arcos del trayecto más el tiempo durante las paradas ( $t_c = T_v + Y/f^o$ ), la frecuencia ofrecida se puede escribir como  $f^o = (B - tY)/T_v$ . Luego, imponiendo  $f^o = f^d$ , se obtiene finalmente:

$$Y = \frac{Bk}{\alpha T_v + kt} \quad (1)$$

La ecuación (1) puede interpretarse como una relación básica de la función de producción del servicio. Ella expresa que la cantidad de pasajeros que es posible transportar por unidad de tiempo depende de una serie de variables, como el tamaño de flota, la capacidad de los

vehículos, la velocidad de operación de los buses y del largo promedio de viaje de los pasajeros, así como también del tiempo que éstos tardan en subir y bajar de los buses. El parámetro  $\alpha$  ( $0 < \alpha \leq 1$ ) dependerá de la estructura de la demanda que enfrente el operador del servicio.

La expresión analítica de la función de producción puede plantearse como sigue:

$$Y \leq \min \left\{ \frac{B}{a}, \frac{H}{b}, \frac{M}{c} \right\} \quad (2)$$

$$H = \eta B \quad (3)$$

$$M = \begin{cases} \bar{M} & \forall B \leq \bar{B} \\ \bar{M} + m(B - \bar{B}) & \forall B > \bar{B} \end{cases} \quad (4)$$

$$k \leq K \quad (5)$$

$H$ : cantidad de mano de obra necesaria expresada en horas-hombre (principalmente choferes).

$M$ : cantidad de terminal de operación (por ejemplo medida en metros cuadrados necesarios para operar una flota de tamaño  $B$ ).

$\bar{M}$ : tamaño mínimo de terminal, aunque se opere una flota de un solo bus.

$\phi_h$ : salario por unidad de tiempo del personal o mano de obra (choferes, cobradores, etc.).

$\phi_m$ : gasto asociado a la operación de una unidad de terminal por unidad de tiempo.

$\eta$ : número mínimo de empleados necesarios para operar un bus (por ejemplo  $\eta = 1$  si sólo se requiere chofer o  $\eta = 2$  si se requiere chofer y cobrador separadamente, o se opere en dos turnos).

$m$ : capacidad marginal de terminal requerida por cada bus adicional.

$K$ : capacidad máxima factible de un bus (pasajeros por bus).

$a$ : cantidad de buses necesaria para producir una unidad de  $Y$ .

$b$ : cantidad de mano de obra necesaria para producir una unidad de  $Y$ .

$c$ : unidades de capacidad de terminal necesarias para producir una unidad de  $Y$ .

La expresión (2) indica que el tamaño de flota  $B$ , la mano de obra  $H$  y la capacidad de terminales  $M$  son factores perfectamente complementarios (función de producción de *coeficientes fijos* o *proporciones constantes* (Leontief, 1946)). La restricción (3) indica el número de empleados que son necesarios para operar la flota dada en que cada bus requiere un número fijo de  $\eta$  empleados. La relación (4) representa la capacidad necesaria de terminales dependiendo del tamaño de flota. Supone que existe un tamaño mínimo de terminal  $\bar{M}$  para poder operar, cuya capacidad se supone igual a la requerida para operar  $\bar{B}$  buses. Si el tamaño de flota es  $B > \bar{B}$ , entonces será necesario aumentar la capacidad del terminal en  $m$  unidades por cada bus adicional. La expresión (5) representa la capacidad o tamaño máximo de los buses de acuerdo a la tecnología disponible. Evidentemente, por razones de tecnología y por capacidad de las vías, los buses no pueden exceder de cierto tamaño límite.

De (2), y usando (1), se obtiene que:  $a = \frac{\alpha T_v + kt}{k}$ ,  $b = \eta \left( \frac{\alpha T_v + kt}{k} \right)$ ,  $c = m \left( \frac{\alpha T_v + kt}{k} \right)$ .

Introduciendo estas tres expresiones en (2), la función de costo del operador se puede obtener resolviendo el siguiente problema de optimización:

$$\min \frac{C_k LB}{t_c} + C_r tY + \phi_h H + \phi_m M \quad (6)$$

$$s.a.: Y = \min \left\{ \frac{Bk}{\alpha T_v + kt}; \frac{Hk}{\eta(\alpha T_v + kt)}; \frac{Mk}{m(\alpha T_v + kt)} \right\} \quad (i)$$

$$M = \begin{cases} \bar{M} & \forall B < \bar{B} \\ \bar{M} + m(B - \bar{B}) & \forall B \geq \bar{B} \end{cases} \quad (ii)$$

$$k \leq K \quad (iii)$$

La expresión (6) define el gasto incurrido por la empresa cuando utiliza un determinado conjunto de factores  $B$ ,  $H$  y  $M$ , y está compuesto por cuatro partes que se explican a continuación:

- La primera ( $C_k LB/t_c$ ) corresponde al gasto de operación de los vehículos de la flota por unidad de tiempo.  $C_k$  representa el costo por vehículo-kilómetro, que multiplicado por el número de kilómetros recorridos por la flota en una unidad de tiempo ( $LB/t_c$ ), permite determinar el gasto de operar la flota por unidad de tiempo.
- La segunda expresión ( $C_r tY$ ) es el gasto debido al consumo de combustible durante las paradas (ralentí), y que es directamente proporcional al número de pasajeros transportados  $Y$ . El parámetro  $C_r$  es el consumo en ralentí de un bus, y evidentemente es constante.
- La tercera expresión ( $\phi_h H$ ) representa el gasto en mano de obra por unidad de tiempo.
- El último término es el gasto de operación del terminal ( $\phi_m M$ ).

Resolviendo el problema (6) planteado, se obtiene la siguiente estructura de costos de operación del servicio:

$$C_{op} = \frac{C_k L \alpha}{k} Y + C_r tY + (\phi_h \eta + \phi_m m) \left( \frac{\alpha T_v}{k} + t \right) Y, \quad \forall Y \geq \frac{\bar{M}}{m} \left( \frac{k}{\alpha T_v + kt} \right) \quad (7)$$

$$C_{op} = \frac{C_k L \alpha}{k} Y + C_r tY + \phi_h \eta \left( \frac{\alpha T_v}{k} + t \right) Y + \phi_m \bar{M}, \quad \forall Y < \frac{\bar{M}}{m} \left( \frac{k}{\alpha T_v + kt} \right) \quad (8)$$

#### 4. ESTRUCTURA DE COSTO DE USUARIOS

El principal recurso invertido por los usuarios del sistema es el tiempo que dedican a consumir el servicio, es decir, a realizar el viaje. El tiempo total dedicado a un viaje se puede descomponer en tres partes: el tiempo de acceso al paradero, el tiempo de espera en el paradero, y el tiempo de viaje dentro del vehículo (bus). Por lo tanto, el gasto en que

incurre un usuario  $i$  por conceptos de tiempo se puede expresar como:

$$G_{us}^i = \phi_a t_a + \phi_e t_e + \phi_v t_v \quad (9)$$

$\phi_a$ : valor del tiempo de acceso al paradero.

$\phi_e$ : valor del tiempo de espera en paradero.

$\phi_v$ : valor del tiempo de viaje.

$t_a$ : tiempo medio de acceso.

$t_e$ : tiempo medio de espera en paradero.

$t_v$ : tiempo medio de viaje en bus.

En nuestro caso, el **tiempo de acceso**  $t_a$  se considerará fijo para cada pasajero.

Para determinar el costo del **tiempo de espera** de los usuarios en paradero, se requiere de un mayor análisis. Las distintas formas de distribuciones de probabilidad tanto en el arribo de personas a un paradero, como en la llegada de los buses, van a determinar el tiempo de espera de los usuarios en función de la frecuencia del servicio. Si las personas llegan de manera uniforme al paradero, el tiempo de espera promedio de cada usuario será la mitad del intervalo ( $h$ ) entre dos buses sucesivos e igual a  $t_e = h/2 = 1/2f$ . Combinando esta última expresión con la ecuación de frecuencia  $f^o = (B - tY)/T_v$ , se obtiene que el tiempo promedio de espera en paradero es:

$$t_e = \frac{T_v}{2(B - tY)} \quad (10)$$

Se observa en (10) que si aumenta el tiempo de viaje  $T_v$  aumentará el tiempo de espera  $t_e$ ; esto se debe a que, para un tamaño  $B$  de flota fijo, un mayor tiempo de viaje induce una menor frecuencia del servicio. Del mismo modo, un aumento en el tamaño de flota  $B$  reducirá el tiempo promedio de espera en paradero, ya que *ceteris paribus* en este caso la frecuencia ofrecida aumentará. Similares observaciones se pueden efectuar con respecto al parámetro  $t$  e  $Y$ : si la gente tarda más en subir y bajar a los buses (por ejemplo por que las puertas son muy estrechas) aumentará el tiempo de ciclo, reduciéndose la frecuencia; lo mismo ocurre al aumentar el número de personas  $Y$  que utiliza el servicio (dada una flota  $B$ ).

Sin embargo, en el largo plazo cuando la flota se adapta a la demanda el tamaño de flota se obtiene usando (1) como  $B = Y \left( \frac{\alpha T_v}{k} + t \right)$ . En este caso, los buses viajarán siempre a plena capacidad (llenos) ya que la oferta se adapta en la forma más eficiente posible a la cantidad de viajes demandados  $Y$ . Por lo tanto, si reemplazamos la expresión de  $B$  en (10) se obtiene:

$$t_e = \frac{k}{2\alpha Y} \quad (11)$$

Como vemos, *ceteris paribus* el tiempo de espera experimentado por cada viajero  $t_e$  aumenta al aumentar la capacidad de los vehículos, porque ello hace disminuir la

frecuencia ofrecida (menos buses pero más grandes); por otra parte,  $t_c$  disminuye al aumentar la demanda (igual al número de pasajeros transportados en este caso), ya que ello hace que aumente la frecuencia ofrecida.

Para una estructura dada de demanda entre paradas, el **tiempo de un viaje**  $t_v$  dentro del bus dependerá de: la velocidad de operación de los vehículos, la distancia recorrida por los usuarios y el tiempo utilizado en las paradas realizadas. El tiempo de viaje de los usuarios se puede escribir como la distancia recorrida, dividida por la velocidad promedio de operación de los buses. Considerando una distancia promedio  $l$  para los viajeros, y una velocidad de operación  $v_c$  promedio durante el ciclo (velocidad comercial), el tiempo de viaje de las personas será  $t_v = l/v_c$ . Por otra parte, la velocidad  $v_c$  se puede escribir como la razón entre el largo total del recorrido  $L$  y el tiempo total que tarda un bus en recorrer un ciclo completo  $t_c$ . Por lo tanto,  $v_c = L/t_c$ , y el tiempo de viaje de los usuarios se puede expresar como:

$$t_v = \frac{l}{L/t_c} = \frac{lt_c}{L} \quad (12)$$

Usando la expresión para el tiempo de ciclo ( $t_c = T_v + Y/f^o$ ), y la expresión para la frecuencia  $f^o = (B - tY)/T_v$ , se tiene finalmente que el tiempo de viaje de los usuarios se puede expresar como:

$$t_v = \frac{l}{L}T_v + \frac{tY T_v}{L(B - tY)} \quad (13):$$

El primer término de la derecha de (13) representa el tiempo gastado mientras el vehículo está en movimiento, que evidentemente dependerá del largo  $l$  del viaje del usuario y de la velocidad a la que circulan los buses. Si existe congestión, la velocidad disminuirá y (13) tendrá un mayor valor. El segundo término de la derecha representa el tiempo gastado en las paradas, el que depende del tiempo  $t$  requerido para que suban y bajen los pasajeros. Se observa que al aumentar el número de usuarios  $Y$ , aumentará el tiempo durante las paradas. Del mismo modo, si únicamente aumenta el tamaño de flota  $B$ , cada bus irá en promedio con menos pasajeros, por lo que utilizará menos tiempo durante las paradas realizadas.

Introduciendo la expresión  $B = Y\left(\frac{\alpha T_v}{k} + t\right)$  dentro de (13) se obtiene:

$$t_v = \frac{l}{L}T_v + \frac{ltkY}{L\alpha} \quad (14):$$

Usando las expresiones (11) y (14) en (9), la función de costo total para los  $Y$  usuarios del servicio se puede expresar como:

$$C_{us} = \phi_a t_a Y + \frac{\phi_e k}{2\alpha} + \frac{\phi_v l T_v}{L} Y + \frac{\phi_v l t k}{L\alpha} Y \quad (15)$$

El término  $\frac{\phi_v l T_v}{L} Y$  es el costo del tiempo gastado cuando el vehículo está en movimiento.

Para cada usuario, el tiempo de su viaje será  $\frac{l T_v}{L} = \frac{l}{v}$ . En consecuencia, si aumenta el largo  $l$  del viaje realizado o el nivel de congestión (lo que reduce la velocidad  $v$  de los buses), aumentará el tiempo de viaje. El tercer término de (15)  $\frac{\phi_v l t k}{L \alpha} Y$  representa el costo que experimentan los  $Y$  usuarios del servicio producto de las paradas realizadas durante el trayecto para que los pasajeros se suban o bajen del bus. Notar que  $\frac{l t k}{L \alpha}$  es el tiempo de espera de los pasajeros de un bus asociado a la subida y bajada de un pasajero adicional, durante un viaje de largo  $l$ ; luego,  $\frac{l t k}{L \alpha} Y$  es el tiempo de espera total de los  $Y$  pasajeros que viajan una distancia promedio  $l$ , ocasionado por las subidas y bajadas en los paraderos mientras realizan el viaje.

## 5. ESTRUCTURA DE COSTOS DEL SISTEMA

El costo total del sistema se considerará como la suma del costo de operadores más usuarios. Luego, de las expresiones (8) y (15) se obtiene:

$$C_{TOT} = \frac{C_k L \alpha}{k} Y + C_r t Y + \phi_h \eta Y \left( \frac{\alpha T_v}{k} + t \right) + \phi_m \bar{M} + \phi_a t_a Y + \frac{\phi_e k}{2 \alpha} + \frac{\phi_v l T_v}{L} Y + \frac{\phi_v l t k}{L \alpha} Y \quad (16)$$

Esta expresión (16) es válida si  $Y < \frac{\bar{M}}{m} \left( \frac{k}{\alpha T_v + k t} \right)$ . De lo contrario, de (9) y (13) se tendría:

$$C_{TOT} = \frac{C_k L \alpha}{k} Y + C_r t Y + (\phi_h \eta + \phi_m m) \left( \frac{\alpha T}{k} + t \right) Y + \phi_a t_a Y + \frac{\phi_e k}{2 \alpha} + \frac{\phi_v l T_v}{L} Y + \frac{\phi_v l t k}{L \alpha} Y \quad (17)$$

El siguiente análisis, y sin pérdida de generalidad, se realizará a partir de (16). Los cuatro primeros términos de la derecha de (16) corresponden a los costos de operación (sección 3), mientras que el resto corresponde a los costos de los usuarios (sección 4).

En ausencia de congestión, de (16) se obtiene que los costos medios y marginales son:

$$C_{me}^{TOT} = \frac{C_k L \alpha}{k} + C_r t + \phi_h \eta \left( \frac{\alpha T}{k} + t \right) + \frac{\phi_m \bar{M}}{Y} + \phi_a t_a + \frac{\phi_e k}{2 \alpha Y} + \frac{\phi_v l T_v}{L} + \frac{\phi_v l t k}{L \alpha} \quad (18)$$

$$C_{mg}^{TOT} = \frac{C_k L \alpha}{k} + C_r t + \phi_h \eta \left( \frac{\alpha T}{k} + t \right) + \phi_a t_a + \frac{\phi_v l T_v}{L} + \frac{\phi_v l t k}{L \alpha} \quad (19)$$

Luego, se deduce que el grado de economías de escala ( $S$ ) es:

$$S = \frac{C_{me}^{TOT}}{C_{mg}^{TOT}} = 1 + \frac{\phi_m \bar{M} + \frac{\phi_e k}{2\alpha}}{Y \left( \frac{C_k L \alpha}{k} + C_r t + \phi_h \eta \left( \frac{\alpha T}{k} + t \right) + \phi_a t_a + \frac{\phi_e k}{2\alpha Y} + \frac{\phi_v l T_v}{L} + \frac{\phi_v l t k}{L \alpha} \right)} > 1 \quad (20)$$

Por lo tanto, la operación en terminales y el tiempo de espera de los usuarios son las variables que generan economías de escala en la provisión del servicio en ausencia de congestión. Sin embargo, es interesante notar en (20) que a medida que aumenta el nivel de producción  $Y$ , tienden a haber retornos constantes a escala ( $S = 1$ ). Esto, ya que el segundo término de (20) tiende a cero al aumentar  $Y$ .

En presencia de congestión se tendrá que  $\frac{\partial C_k}{\partial Y} > 0$  y  $\frac{\partial T_v}{\partial Y} > 0$ . Luego, los costos medios y marginales correspondientes a (16) son respectivamente:

$$C_{me}^{TOT} = \frac{C_k L \alpha}{k} + C_r t + \phi_h \eta \left( \frac{\alpha T_v}{k} + t \right) + \frac{\phi_m \bar{M}}{Y} + \phi_a t_a + \frac{\phi_e k}{2\alpha Y} + \frac{\phi_v l T_v}{L} + \frac{\phi_v l t k}{L \alpha} \quad (21)$$

$$C_{mg}^{TOT} = \frac{L \alpha}{k} \left( C_k + Y \frac{\partial C_k}{\partial Y} \right) + C_r t + \phi_h \eta \left( \frac{\alpha}{k} \left( T_v + Y \frac{\partial T_v}{\partial Y} \right) + t \right) + \quad (22)$$

$$\phi_a t_a + \frac{\phi_v l}{L} \left( T_v + Y \frac{\partial T_v}{\partial Y} \right) + \frac{\phi_v l t k}{L \alpha}$$

Por lo tanto, al haber congestión, existirán economías de escala en el sistema sólo si (21) es mayor que (22), es decir, si se cumple:

$$Y^* < \frac{\phi_m \bar{M} + \frac{\phi_e k}{2\alpha}}{\frac{L \alpha}{k} \frac{\partial C_k}{\partial Y} + \frac{\phi_h \eta \alpha}{k} \frac{\partial T_v}{\partial Y} + \frac{\phi_v l}{L} \frac{\partial T_v}{\partial Y}} \quad (23)$$

Los términos del numerador de (23) representan las variables que inducen a la presencia de economías de escala para el sistema, y que vienen dadas por los menores costos en terminales de los operadores y menores costos de tiempo de espera de los usuarios. Los términos del denominador de (23) inducen a deseconomías de escala producto de la congestión en el sistema. Corresponden a los mayores costos de operación de los buses, mayores costos de mano de obra por parte de los operadores y mayores costos de tiempo de viaje por parte de los usuarios. Por lo tanto, lo que indica (23) es que existirán economías de escala para el sistema en la provisión de servicios de buses hasta un determinado nivel de producción  $Y^*$  donde la disminución en los costos unitarios de terminales de los operadores y en los costos de tiempo de espera de los usuarios es mayor que el aumento en los costos de operación de los buses y de mano obra de operadores, más el aumento en los costos de tiempo de viaje de los usuarios, producto de la congestión existente.



## 6. CONCLUSIONES

El desarrollo analítico expuesto en el presente documento demuestra que tanto la operación en terminales como el tiempo de espera de los usuarios de servicios de transporte público inducen economías de escala en la provisión del servicio. Sin embargo, en presencia de congestión pueden generarse deseconomías de escala producto de los mayores costos de operación del servicio y de mayores tiempos de viaje de los usuarios. Por lo tanto, el tamaño de las firmas que está relacionado directamente con el nivel de producción, va a ser relevante en determinar la el grado de economías de escala en el sistema.

## REFERENCIAS

- ALEEN, R. G. D. (1938). *Mathematical analysis for economists*, Nueva York, St. Martin's Press, 504-509.
- FERNÁNDEZ, J.E., J. DE CEA y L. DE GRANGE (1999). Características de producción de un servicio de transporte público de pasajeros, **Actas del IX Congreso Chileno de Ingeniería de Transporte**, 431-448.
- JANSSON, J. O. (1980). A simple bus line model for optimization of service frequency and bus size. **Journal of Transportation Economic and Policy**, **14**, 53-80.
- JARA, S. y A. GSCHWENDER (1997). Tarifas óptimas en transporte público programado, **Actas del VIII Congreso Chileno de Ingeniería de Transporte**, 265-278.
- KERIN, PAUL (1992). Efficient bus fares. **Transport Reviews**, **12**, 33-48.
- LEONTIEF, W. (1946). The pure theory of the guaranteed annual wage contract. **Journal of Political Economy**.
- MOHRING, H. (1972). Optimization and scale economies in urban bus transportation. **American Economic Review**, **62**, 591-604.