

CALIBRACION DE FUNCIONES FLUJO-COSTO PARA UN MODELO DE ASIGNACION DE TRANSPORTE PUBLICO CON RESTRICCION DE CAPACIDAD

Joaquín de Cea Ch., J. Enrique Fernández L.
Depto. Ingeniería de Transporte, U. Católica de Chile
Casilla 306, Santiago 22, CHILE
FAX: (56-2) 686 4818; e-mail: jdc@ing.puc.cl

y

Alfonso Salgado R., J. Manuel Fernández N.
Fernández y De Cea Ingenieros
Lota 2257, of. 402, Santiago, CHILE

FAX: (56-2) 234 1578; e-mail: fydcea@reuna.cl

RESUMEN

En este artículo se presentan las bases de una metodología para calibrar funciones flujo-tiempo de espera en paraderos, que puedan ser utilizadas en modelos de asignación de equilibrio en redes de transporte público. Se considera en primer lugar el caso particular de un paradero simple (servido por una sola línea; Gendreau 1984) y luego el más general, de un paradero múltiple (servido por varias líneas; Gendreau 1984). El primero se presenta normalmente en redes de buses de ciudades medianas y pequeñas y en la mayor parte de las estaciones de metro. El segundo es común en ciudades de gran tamaño, con una fuerte participación de los servicios de buses.

Para representar el fenómeno de espera en un paradero simple se obtienen funciones analíticas basadas en la teoría de colas, y a éstas se aproximan funciones de tipo BPR como las usadas comúnmente en los modelos de asignación. Para un paradero múltiple, el enfoque metodológico que se propone es diferente, pues no existen funciones analíticas para los tiempos de espera. En este caso se han modelado los procesos estocásticos presentes en el fenómeno de espera y luego derivado funciones flujo-tiempo, por simulación. A estas últimas se aproximan luego las funciones BPR.

Se discuten los principales resultados de los análisis realizados y se entregan recomendaciones útiles para calibrar funciones flujo-tiempo de espera en una aplicación particular.

1. INTRODUCCION

El modelo de asignación de equilibrio en redes de transporte público propuesto en De Cea y Fernández (1993) considera en forma implícita la restricción de capacidad de los vehículos, suponiendo que los tiempos de espera experimentados por los usuarios aumentan en la medida que la demanda de pasajeros por el uso de los servicios se aproxima a su capacidad. Dicho modelo se plantea para una red en la que los nodos representan paraderos de transporte público y los arcos conjuntos de líneas atractivas para viajar entre sus nodos inicial y final (arcos de transporte público), accesos entre centroides y paraderos (arcos de acceso) y transbordos entre paraderos (arcos de transbordo).

Los costos de acceso y de transbordo se suponen constantes, en tanto los asociados a los arcos de transporte público son “costos generalizados de viaje” (tarifa, tiempo de viaje en vehículo, tiempo de espera, etc.), representados en el modelo mediante una función BPR como la siguiente:

$$c_s = \bar{c}_s + \frac{\alpha}{f_s} + \beta \cdot \left(\frac{V_s + \tilde{V}_s}{K_s} \right)^n \quad (1)$$

En la ecuación (1), \bar{c}_s representa el tiempo de viaje en vehículo más tarifa, f_s es la frecuencia combinada de las líneas de transporte público que sirven el arco s (puede ser uno o múltiples servicios), V_s es el flujo de pasajeros que viaja entre los nodos inicial y final de s en alguna de sus líneas, \tilde{V}_s es el flujo que compite con V_s por la capacidad de las líneas de s , y K_s es la capacidad total provista por las líneas de s . Los parámetros de calibración de las funciones de costo son α , β y n .

Es fácil ver que el segundo término de la ecuación (1) representa el tiempo de espera a flujo libre del servicio ofrecido por el arco s , en tanto el tercer término da cuenta del “tiempo de espera de congestión”, esto es el aumento del tiempo de espera, por sobre el de flujo libre, en función del flujo de pasajeros, debido a la existencia de una capacidad limitada de los vehículos.

El objetivo de este trabajo es presentar una metodología de calibración (estimación de los parámetros α , β y n) de funciones de tiempo de espera (los dos últimos términos de la ecuación (1)) para dos tipos de paraderos o nodos de la red de transporte público: paradero simple y múltiple (Gendreau, 1984). En el contexto de este artículo se entenderá por paradero simple, aquel por el que pasa una sola línea, existiendo por lo tanto una categoría de usuarios, caracterizada por que siempre le sirve esa línea. En tanto se entenderá por paradero múltiple, aquel por el que pasan varias líneas, existiendo diferentes categorías de usuarios que se caracterizan por que les sirven diferentes conjuntos no disjuntos de las líneas que pasan por el paradero. En ninguno de los dos casos se considera el número de sitios de parada en el paradero, por cuanto el modelo de asignación que ha dado origen a la necesidad de calibrar funciones de espera tipo BPR trabaja con redes de carácter estratégico, en las que dicho atributo normalmente no es modelado. Así, para el caso de un paradero simple (por ejemplo el andén de una estación de metro), todos los arcos de transporte público que se inician en él

tendrán una idéntica función de tiempo de espera asociada, en cambio, para un paradero múltiple (en general un paradero de la red de buses) existirán tantas funciones como arcos de transporte público se inicien en él. Esto debido a que, aunque los parámetros α , β y n fueran los mismos para los diferentes arcos, tanto las frecuencias combinadas como las capacidades de dichos arcos podrán ser diferentes (los conjuntos de líneas atractivas para los distintos arcos que salen de un paradero determinado no son los mismos en general).

La metodología de calibración utilizada es diferente en ambos casos. Para paradero simple, se utilizaron funciones analíticas de acuerdo a la teoría de colas para las modelaciones generales del proceso de espera de un sistema $M/M^{[K]}/1$ o $M/D^{[K]}/1$ (modelaciones que consideran atención en grupos K). Para mayores detalles sobre este tema se puede consultar Bailey (1954), Downton (1955), Powell (1981) y Gendreau (1984).

Para el caso de paradero múltiple no existen fórmulas analíticas para representar el fenómeno de espera, por lo que la metodología de calibración de los parámetros α , β y n se ha basado en el uso de un modelo de simulación. En consecuencia se ha debido desarrollar un modelo de simulación ad hoc para obtener funciones del tiempo de espera, para luego aproximar a ellas funciones del tipo BPR.

En resumen, se ha analizado una serie de paraderos diferentes (de buses y andenes de estaciones de metro), se han verificado ciertas hipótesis respecto de las distribuciones de llegada de vehículos y de pasajeros a los paraderos, y se han obtenido funciones de tiempo de espera basadas en la teoría de colas, mediante funciones analíticas para un paradero simple y de simulación para paradero múltiple. Con dichos desarrollos se han ajustado a ellas funciones de tipo BPR.

2. ANALISIS EMPIRICO DEL FENOMENO DE ESPERA EN PARADEROS

Con el fin de determinar las distribuciones estadísticas más representativas para los procesos de arribo de pasajeros y buses a los paraderos y tratar de ver en qué medida éstas se ajustan a distribuciones conocidas de probabilidades se realizó, en el contexto del estudio que se presenta en SECTRA (1998), una serie de muestreos en una veintena de paraderos de la ciudad de Santiago. Se midieron los tiempos entre arribos (variable aleatoria de interés) de las diferentes categorías de usuarios y líneas que sirven el paradero escogido, a través de encuestas específicas definidas dentro de un plan de muestreo ad hoc.

Para determinar el tipo de distribución que mejor se ajusta a un conjunto de datos producto de una muestra específica, se realizaron tres procedimientos básicos: i) Se determinó qué familia de distribuciones se ajustaba mejor a los datos disponibles, ii) Una vez estimado cuál o cuáles de las distribuciones teóricas parecía ajustarse mejor a los datos, se procedió a estimar los parámetros para dicha curva (método de máxima verosimilitud), iii) Finalmente se determinó cuán bueno era el ajuste realizado para la distribución y sus parámetros (test de bondad de ajuste: Chi-cuadrado, Kolmogorov-Smirnov; Anderson-Darling; ver Law y Kelton, 1991).

Dado lo limitado de la longitud de este artículo, no es posible presentar aquí la gran cantidad de figuras y tablas que respaldan las conclusiones obtenidas. El lector interesado podrá

obtener detalles de la experiencia realizada en SECTRA (1998). A continuación se mencionan sin embargo, las principales conclusiones de este análisis empírico.

La primera conclusión es que el arribo de pasajeros tanto a paraderos servidos por bus o metro puede ser modelado razonablemente como un proceso Poisson (SECTRA, 1998), es decir, que los tiempos entre arribos de usuarios siguen una ley exponencial (proceso de arribo Markov).

Considerando el proceso de arribo de buses, para el caso de paradero múltiple, cuando se realiza un análisis agregado de los datos de todas las líneas que sirven a un paradero en cuestión, existe una tendencia a que la función de distribución de probabilidades para los tiempos entre arribos de buses se aproxime a una exponencial, a diferencia de cuando se analiza desagregadamente cada línea en un paradero múltiple o la única línea correspondiente en el caso de un paradero simple, en cuyos casos los histogramas mostraron que las distribuciones de tiempos entre arribos se desvían de una tendencia generalizada a tiempos entre arribos con distribución exponencial.

En una segunda instancia, para comprender mejor el proceso de arribo de buses a paraderos se analizó, en primer lugar, el fenómeno de salida de los buses de sus respectivos terminales, determinándose la distribución de probabilidades que ellas presentan.

Para el caso específico de la red de transporte público de la ciudad de Santiago, teóricamente, los tiempos entre salidas sucesivas de buses de sus terminales debieran de ser fijos. No obstante, de los análisis realizados en terminales, se pudo determinar que el proceso de salida de los buses no sigue una ley determinística (SECTRA, 1998). Las distorsiones observadas en los procesos de salida de los buses están originadas principalmente por la no disponibilidad de vehículos en las horas programadas de salida, fenómeno que tiene que ver con la variabilidad diaria de la flota total de la línea y con la congestión existente en la red.

En segundo lugar, y de manera de analizar los efectos de las diversas alteraciones enumeradas sobre los tiempos entre arribos de buses a paraderos, y poder definir aquellas distribuciones que mejor representen el fenómeno estudiado, se realizó un análisis de varias líneas considerando la distribución de los tiempos entre arribos de los buses de una línea en diferentes paraderos de su recorrido. Así, al analizar los histogramas de densidad de probabilidades para los datos de tiempos entre llegadas de la línea a ellos, se observó que existe una tendencia a que los histogramas presenten distribuciones exponenciales para los tiempos entre arribos (SECTRA, 1998).

Debido a que el objetivo del presente estudio es de tipo estratégico y considerando las principales conclusiones del análisis reportado anteriormente, se optó por considerar que los intervalos de tiempos de salida de los buses de los terminales y de los tiempos de arribo para buses a paraderos específicos, son de tipo exponencial, para las características específicas de los recorridos que se dan en la ciudad de Santiago.

Para el caso especial del metro, dadas las características de su operación en la ciudad de Santiago, se puede suponer que los trenes arriban determinísticamente a los andenes, lo que como se verá tiene impacto directo en el tiempo de espera a flujo libre.

3. MODELACION DEL FENOMENO DE ESPERA

3.1. Paradero Simple

El proceso a modelar corresponde a un sistema de espera en que personas llegan a un paradero en demanda del servicio de una sola línea de transporte (por ej.: una estación de metro o un paradero por el cual pase sólo un recorrido), para llegar a sus respectivos destinos. En la Figura 1 se muestra el esquema de este proceso, el cual considera por simplificación, sólo un destino genérico. Se supone que el paradero P es servido por una línea l_1 , que llega a él con pasajeros que la abordan anteriormente. En P, los pasajeros que allí esperan aboradarán dicha línea para dirigirse al destino D. La notación utilizada se presenta a continuación.

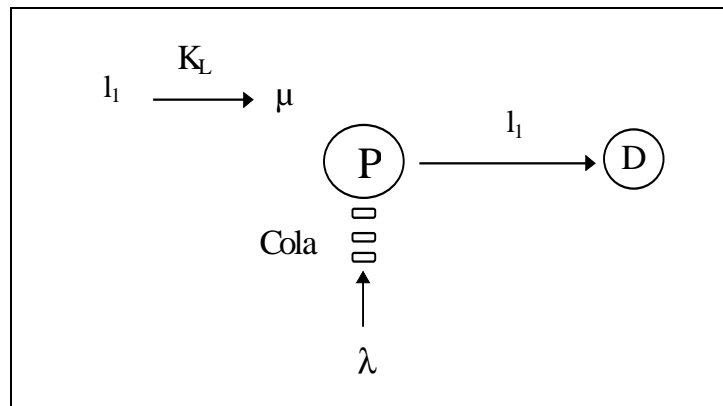


Figura 1: Esquematización del Proceso para Paradero Simple

- K_L : Capacidad libre de cada vehículo, la cual puede ser fija o variable aleatoria, según el caso analizado.
- λ : Tasa de arribo de personas al paradero.
- μ : Tasa de arribo de la línea que llega al paradero.
- K_t : Capacidad total de cada vehículo (pasajeros).

a) Modo Bus

Gendreau (1984) obtiene para estado de régimen del proceso de espera en un paradero simple, el tiempo de espera promedio de una cola $M / M^{[K_L]} / 1$ (proceso de arribo Markov/ proceso de servicio Markov con atención en grupos K_L fijos/ número de servidores igual a uno). Esta modelación corresponde a una adecuada representación de los procesos de arribo estudiados y analizados, para el modo bus. La expresión analítica derivada por Gendreau para el tiempo de espera (T_e) de este proceso es:

$$T_e = \frac{r_0}{(1 - r_0) \cdot \lambda} \quad (2)$$

donde r_0 es la raíz comprendida entre 0 y 1 del polinomio:

$$\mu \cdot r^{K_L+1} - (\lambda + \mu) \cdot r + \lambda = 0 \quad (3)$$

Por otra parte, las curvas BPR que se desea calibrar, para el tiempo promedio de espera (t_e) con parámetros t_0 (tiempo de espera a flujo libre), β y n , tienen la siguiente forma característica:

$$t_e = t_0 + \beta \cdot \phi^n \quad (4)$$

donde ϕ , en términos de λ , μ , K_t y K_L está dado por:

$$\phi = \frac{\lambda + (K_t - K_L) \cdot \mu}{K_t \cdot \mu} \quad (5)$$

A priori se podría esperar que para el caso bajo análisis (paradero simple modo bus) y su aproximación a curvas BPR, t_0 , β y n sean funciones de K_t , K_L y μ , con variable independiente λ .

Debe notarse que para efectos de comparación de los resultados con las funciones del modelo de asignación con restricción de capacidad (De Cea y Fernández, 1993), se debe definir:

$$V_s = \lambda, \tilde{V}_s = (K_t - K_L) \cdot \mu, \text{ es decir, } K_L = K_t - \left(\frac{\tilde{V}_s}{\mu} \right) \quad (6)$$

Una vez establecidas las relaciones anteriores se procedió a ajustar los parámetros de la ecuación (4) mediante una aproximación a las curvas de Gendreau. El procedimiento seguido fue el siguiente:

i) Para valores fijos de μ , K_t y K_L se generaron valores de T_e (ecuaciones (2) y (3)) para distintos valores de λ . A fin de hacer compatibles la funciones de Gendreau con las BPR se graficaron curvas T_e vs ϕ , obteniéndose familias de curvas de Gendreau (ver Figura 2) para diferentes valores de μ , K_t y K_L .

ii) Usando el método de mínimos cuadrados, para cada una de las curvas de Gendreau, se aproximó la correspondiente BPR, registrándose los valores de t_0 , β y n .

El procedimiento anterior fue realizado para diferentes valores de los parámetros μ , K_t y K_L . Las curvas resultantes de algunos de los casos analizados se muestran en la Figura 2 (un análisis más general se puede encontrar en SECTRA, 1998). Las principales conclusiones que se desprenden de este análisis para el ajuste de los parámetros de la ecuación (4) para diferentes valores de μ , K_t y K_L , fueron las siguientes: 1) t_0 se aproxima siempre a $1/\mu$;

2) n se mantiene constante dados un K_L y K_t fijos; 3) β siempre mantiene la forma c / μ , donde el parámetro c es fijo para K_L y K_t fijos.

De los resultados obtenidos se dedujo además que c y n son sólo funciones de K_L y K_t . Así, resulta que la curva BPR calibrada para el tiempo promedio de espera en un paradero simple, corresponde en su forma general a:

$$t_e = \frac{1}{\mu} + \left[\frac{4,016 + 1,027 \cdot \left(\frac{K_t - K_L}{K_L} \right)^{0,3174}}{\mu} \right] \cdot \phi^{4,22 + 6,18 \cdot \left(\frac{K_t - K_L}{K_L} \right)} \quad (7)$$

De la expresión de la ecuación (7) se observa que existen familias de curvas para un μ fijo, las que dependen de K_L y K_t . En la Figura 2 se muestran dos familias de curvas correspondientes a $\mu = 0,15$ y $0,5$ vehículos por minuto, con $K_t = 40$ pasajeros y $K_L = 2; 20; 32$ y 40 pasajeros.

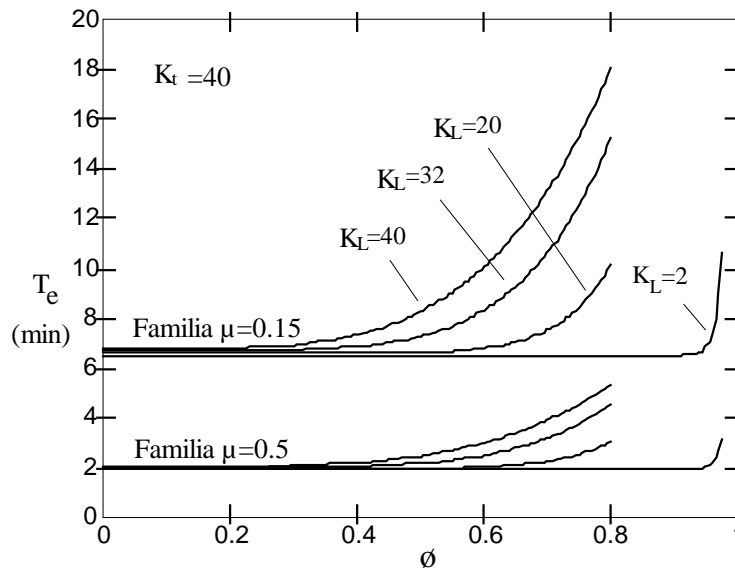


Figura 2: Familias de Curvas BPR

De la ecuación (7) se puede observar que los parámetros β y n de la función BPR para un paradero determinado, sólo pueden determinarse una vez conocidos los valores de K_t y K_L . Si para un sistema de buses se supone, por ejemplo, que la capacidad total de los vehículos es la misma en todos los paraderos (un solo tipo de bus), β y n dependen de K_L . No obstante el valor de K_L dependerá de cada paradero en particular. Obviamente, tal como sucede en el caso de las redes viales, lo más adecuado parece ser categorizar los paraderos de acuerdo a K_L para limitar el número de funciones de tiempo de espera en todo el sistema. Así, por ejemplo, en un paradero terminal ($K_L=K_t$), el término $(K_t - K_L) / K_L = 0$ y la función BPR (ecuación (7)) es:

$$t_e = \frac{1}{\mu} + \left[\frac{4,016}{\mu} \right] \cdot \phi^{4,22} \quad (8)$$

A medida que K_L disminuye, aumentan los valores de los parámetros c y n (para $K_L=0,5K_t$, $n=10,4$ y $c=5,04$), obteniéndose valores muy altos para el parámetro n . Como es sabido, el uso de funciones con tales parámetros ($n>6$) introduce serios problemas de convergencia a los algoritmos de asignación. Para casos en que aplicando la ecuación (7) se obtengan valores de $n>6$ se recomienda fijar n en 6 y recalcular los valores del parámetro c que mejor reproduce la correspondiente curva de Gendreau. Evidentemente este procedimiento permitirá obtener razonables aproximaciones para valores de ϕ inferiores a 0,8; pero no tan buenas para valores entre 0,8 y 1.

b) Modo Metro

El caso de una estación de metro (un andén específico de una línea) corresponde a un paradero simple en el cual el tiempo de arribo entre trenes es fijo y el arribo de personas a él corresponde a un proceso de arribo Poisson a cierta tasa λ . Downton (1955) obtiene para estado de régimen del proceso $M / D^{[K_L]} / 1$ (proceso de arribo Markov/proceso de servicio determinístico con atención en grupos K_L fijos/número de servidores igual a uno, en este caso un tren), el tiempo promedio de espera en cola. Esta modelación corresponde a una adecuada representación de los procesos de arribo estudiados y analizados para el modo metro. La expresión analítica derivada por Downton para el tiempo de espera (T_e) de este proceso es:

$$T_e = \left(\frac{K_L \cdot (1 - K_L + \lambda \cdot T)}{2 \cdot (K_L - \lambda \cdot T)} + \sum_{i=1}^{K_L-1} \frac{1}{1 - z_i} \right) \cdot \frac{1}{\lambda} \quad (9)$$

donde T corresponde al tiempo entre arribos ($T=1/\mu$) y los z_i corresponden a las raíces complejas que se encuentran dentro del círculo unitario de la siguiente ecuación característica:

$$z^{K_L} \cdot e^{T \cdot \lambda(1-z)} - 1 = 0 \quad (10)$$

Para estimar los parámetros de la curva BPR (ecuación (4)) se utilizó el mismo procedimiento básico establecido para el modo bus. Las principales conclusiones de este análisis siguen las mismas tendencias generales que las deducidas para el caso $M / M^{[K_L]} / 1$ (SECTRA, 1998). Estas corresponden para este caso a: 1) t_0 se aproxima siempre a $1/(2 \cdot \mu)$; 2) n se mantiene constante dados un K_L y K_t fijos; 3) β siempre mantiene la forma $c'/(2 \cdot \mu)$, donde el parámetro c' es fijo para K_L y K_t fijos.

Las aproximaciones analizadas para este caso a través de curvas BPR presentan siempre valores muy altos de n ($n \gg 6$), es decir, funciones muy escuadradas. Tal como en el caso del modo bus, se recomienda en esta situación fijar el valor de n en, por ejemplo, 6 y “recalibrar” el valor del parámetro c' (el que mejor reproduzca la correspondiente curva de Downton).

3.2. Paradero Múltiple

El proceso a modelar, en este caso, corresponde a un sistema de espera en que pasajeros que llegan al paradero (categorizados según las líneas que tienen disponibles para llegar a su destino) demandan el servicio de un subconjunto de líneas que pasan por él, las cuales representan sus opciones para llegar a sus respectivos destinos. En la Figura 3 se muestra el esquema de este proceso, donde se supone que el paradero P es servido por m líneas (l_1, l_2, \dots, l_m) que llegan a él con pasajeros que abordaron anteriormente (y continúan en los vehículos), y considera por razones de simplificación de la presentación, sólo tres destinos D_1, D_2 y D_3 , con determinadas líneas para llegar a ellos. A continuación se definen los elementos básicos de operación en P.

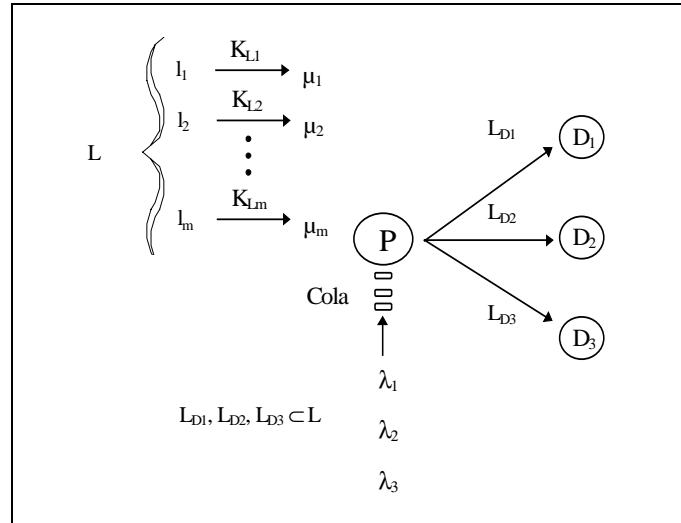


Figura 3: Esquemización del Proceso para Paradero Múltiple

- L : Conjunto de líneas que pasan por el paradero (l_1, l_2, \dots, l_m).
- D_1, \dots, D_3 : Destinos que definen la categoría de los pasajeros que arriban al paradero (categorías 1, 2, 3 respectivamente).
- L_{D1}, \dots, L_{D3} : Subconjuntos no disjuntos de L que corresponden al vector de preferencia (líneas) que satisface a cada categoría de pasajeros para ir a su respectivo destino.
- K_{L1}, \dots, K_{Lm} : Capacidades libres de cada vehículo, las cuales pueden ser fijas o variables aleatorias, según se analice el caso.
- K_i : Capacidad total de cada vehículo (pasajeros).
- $\lambda_1, \dots, \lambda_3$: Tasas de arribo de pasajeros al paradero según categoría.
- μ_1, \dots, μ_m : Tasa de arribo de la línea que llega al paradero.

En general, dado un paradero determinado, el número de categorías diferentes de pasajeros (según paradero de destino) es alto (ver Fernández y De Cea, 1993). Para estos casos (ver Gendreau, 1984) no existen fórmulas analíticas que representen en forma razonable el fenómeno de espera en cuestión. Por esta razón, se adoptó, en esta situación la modalidad de simulación (método ampliamente usado para estudiar sistemas complejos) con el fin de obtener las funciones correspondientes de los tiempos de espera, mediante calibración de

curvas BPR, en función de la congestión del sistema.

4. SIMULACION DE OPERACION DE PARADEROS

4.1. Definición del Modelo

La simulación de un paradero múltiple de buses puede ser modelada básicamente mediante lo que se conoce como un sistema de colas de carácter estocástico. En general se puede decir que un sistema de colas queda caracterizado por tres componentes: *el proceso de arribo, el mecanismo de servicio, y la disciplina de la cola.*

El *proceso de arribo* describe la forma en que llegan los clientes al sistema (tiempos entre arribos) para el cual se utilizaron las conclusiones obtenidas en el punto 2. En el caso de paraderos múltiple (varias líneas) es necesario especificar la tasa de llegada de cada una de las categorías de usuarios (definidas a partir de estas líneas).

El *mecanismo de servicio* describe el número de servidores y la distribución de probabilidades de los tiempos de servicio, que corresponde en este caso a los tiempos entre arribo de los buses, para los que se han utilizado también las conclusiones del punto 2.

La *disciplina de la cola* se refiere a la regla que sigue el servidor a la hora de escoger a su próximo cliente. Para el caso de paraderos múltiples la política queda definida de la siguiente manera: si un bus llega y el paradero está vacío no se detiene a esperar pasajeros; si existe una cola de espera la política de atención es FIFO para todos aquellos clientes que les sirva el bus en cuestión (bus perteneciente a la categoría del pasajero específico que se está atendiendo); y, a lo más pueden abordar el bus K_L personas, donde K_L es la capacidad libre que lleva el bus (para las simulaciones realizadas se ha considerado que dicho valor es fijo para todas las líneas).

4.2. Implementación de un Programa Computacional Ad Hoc

Una vez especificado el modelo se implementó un programa computacional ad hoc para la simulación del sistema (SECTRA, 1998). Dentro de éste, uno de los aspectos más importantes fue la generación de variables aleatorias de distribuciones específicas involucradas en el proceso. Así, se analizó y validó la implementación específica, y la generación de variables aleatorias de entrada necesarias para la simulación, para el generador con que se contó (Law y Kelton, 1991).

4.3. Diseño de Experimentos y Validación del Modelo

En esta etapa se tomaron decisiones con respecto a las condiciones iniciales para las corridas de simulación, el largo del período necesario para estabilizar las variables estocásticas (si es necesario) durante la simulación y el número de corridas de simulación independientes (repeticiones) a realizar en cada alternativa (SECTRA, 1998). Además, para la simulación de paraderos múltiples se aplicó la técnica de reducción de varianza mediante variables antitéticas (Law y Kelton, 1991), para dar a los resultados mayor precisión y eficiencia estadística, medida a través de las varianzas de las variables aleatorias de salida de la simulación.

El modelo se validó comparando los resultados obtenidos de una simulación de éste para el caso de un paradero simple contra los resultados obtenidos al resolver las ecuaciones de Gendreau. En la Figura 4 se muestran los resultados obtenidos al simular con el modelo desarrollado, buses arribando cada 5 minutos (puntos en el gráfico) y la BPR correspondiente que mejor se aproxima a los resultados simulados. La Figura 5 muestra, para las mismas condiciones los resultados obtenidos mediante la ecuación de Gendreau (1984), para cada punto de la curva, y la respectiva BPR ajustada.

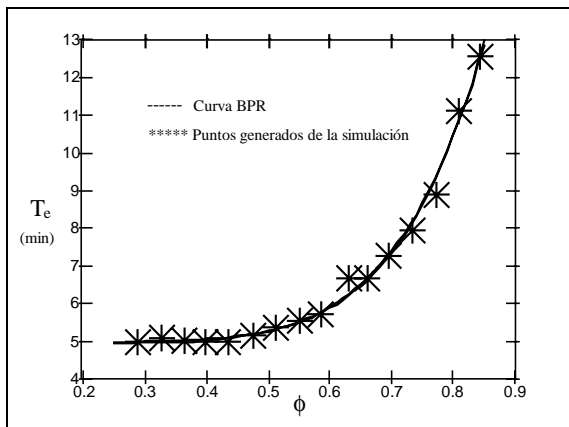


Figura 4: Calibración Parámetros Curvas BPR de la Simulación
 $(t_0=5,007 \beta=22,12 n=6,305)$

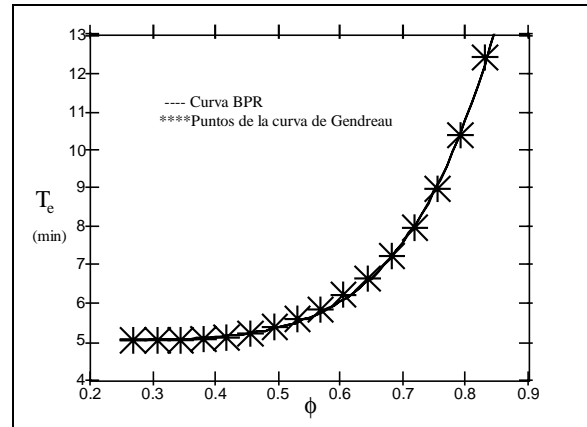


Figura 5: Calibración Parámetros Curvas BPR de las ecs. de Gendreau
 $(t_0=5,013 \beta=23,62 n=6,28)$

Como se aprecia de las Figuras 4 y 5, los parámetros de las curvas BPR aproximadas de la simulación ($t_0 = 5,007$, $\beta = 22,12$ y $n = 6,305$) y de Gendreau ($t_0 = 5,013$, $\beta = 23,62$ y $n = 6,28$) son prácticamente iguales, lo que nos asegura que para el caso de paradero simple la simulación fue bien construida.

Las condiciones de simulación que arrojaron precisiones adecuadas para obtener cada punto, para diferentes congestiones de la curva de tiempo de espera correspondiente, se determinaron en 540 minutos para el tiempo de simulación y 50 repeticiones (SECTRA, 1998). La relevancia de las condiciones de simulación en los valores de salida del modelo se muestran en la Tabla 1. En ella se observan las diferencias en los valores de salida para simulaciones del modelo construido, para dos casos de condiciones de simulación diferentes (caso de simulación cualquiera).

Tabla 1
Influencia de Condiciones de Simulación en los Resultados de Salida

t_{sim}=120 min. n= 10 rep.		t_{sim}=540 min. n= 50 rep.	
Tiempo de espera (min)	Desv. Estándar	Tiempo de espera (min)	Desv. Estándar
4.5491	0.2378	4.7877	0.1113
4.1521	0.2119	4.8629	0.0767
4.5676	0.1940	4.9553	0.1005
4.8232	0.4638	4.9411	0.0825
4.2766	0.2705	5.0677	0.1177
4.5319	0.1791	5.1518	0.1380
5.0677	0.4978	5.4471	0.1464
4.8175	0.3005	5.4024	0.1185
6.4828	0.6171	5.8349	0.1808
6.4790	0.5859	6.5297	0.2378
6.2857	0.6258	6.8453	0.2287
6.4611	0.5949	7.1597	0.2569
8.2568	1.3363	8.1418	0.3025
8.7623	0.7411	9.6188	0.4959
7.9374	0.5655	11.9023	0.9040
10.1216	1.1594	11.5925	0.6808
9.2091	0.7170	13.7100	0.8791
10.9688	0.9685	16.3415	1.2996
14.7196	1.4510	23.8161	1.9686
		26.7120	2.2057

El caso de paradero múltiple corresponde a una extensión del caso de paradero simple. Pero a diferencia del paradero simple, para el múltiple no existen formulaciones analíticas para los tiempos de espera considerando las condiciones de operación descritas. Por esto, la adecuación de las condiciones básicas establecidas como apropiadas para el caso simple (540 minutos de tiempo de simulación y 50 repeticiones) fueron inspeccionadas en términos de la variabilidad de los puntos generados en la simulación del caso múltiple, para las que se obtuvieron resultados satisfactorios.

4.4. Resultados de la Simulación Paradero Múltiple

Para los casos de paradero múltiple (modo bus) simulados se ajustaron los parámetros t_0 , β y n de acuerdo a la siguiente curva BPR genérica:

$$t_e^j = t_0^j + \beta^j \cdot \phi^n \quad (11)$$

donde t_e^j corresponde al tiempo de espera de los usuarios de la categoría j.

Las simulaciones se realizaron para paraderos en que se varió la frecuencia de llegada de buses (μ) entre 0,05 y 1,0 vehículos/min., para diferentes casos de 2 y 3 líneas pasando por él, con $K_L = 30$ y $K_t = 40$ fijos, para la capacidad libre y total respectivamente, de los vehículos que pasan por el paradero; considerando las respectivas categorías de usuarios según el caso. Algunos de los resultados de estas simulaciones se muestran en el Apéndice. Mayores detalles pueden encontrarse en SECTRA (1998).

Los resultados más interesantes obtenidos de las simulaciones realizadas son:

$$i) t_0^j = \frac{1}{\sum_{i \in L_j} \mu_i} \quad (12)$$

donde t_0^j es el tiempo de espera sin congestión (flujo libre) para la categoría j , μ_i la frecuencia de la línea i y L_j son las **líneas que le sirven a la categoría de pasajeros j** . Este resultado confirma los obtenidos teóricamente cuando se consideran tiempos entre llegadas de buses siguiendo un distribución exponencial.

$$ii) \beta^j = \frac{c''}{\sum_{i \in L} \mu_i} \quad (13)$$

donde L es el conjunto de líneas que pasan por el paradero. Un resultado digno de destacarse es que el **parámetro β^j depende de todas las líneas que pasan por el paradero**, sirvan o no a la categoría j , a diferencia del término a flujo libre (t_0^j) que es función de las frecuencias de las líneas que efectivamente sirven a los usuarios de la categoría j .

Por otro lado, el parámetro c'' , aparentemente al igual que en el caso de paradero simple, depende de las capacidades totales y libres de cada línea. Esto se confirma en parte dado que para los experimentos de simulación realizados, en los cuales K_L y K_t se mantuvieron fijos (en 30 y 40, respectivamente), se obtuvieron valores de c'' bastante estables, con una media de 4,53 y un intervalo de confianza al 95% de [4,38 4,68] (debe recordarse que los resultados de la simulación son de tipo estocástico). No obstante, con los experimentos realizados no fue posible en este caso inferir una función analítica para c'' equivalente a la que se obtuvo para c' (ecuación (7)).

iii) El parámetro n , aparentemente al igual que en el caso de paradero simple, depende de las capacidades totales y libres de cada línea. Esto se confirma en parte dado que para los experimentos de simulación realizados, en los cuales K_L y K_t se mantuvieron fijos (en 30 y 40, respectivamente), se obtuvieron valores de n bastante estables, con una media de 6,42 y un intervalo de confianza al 95% de [6,27 6,57]] (debe recordarse que los resultados de la simulación son de tipo estocástico). No obstante, al igual que lo sucedido con c'' , con los experimentos realizados no fue posible en este caso inferir una función analítica para n equivalente a la que se obtuvo en el caso de paradero simple (ecuación (7)).

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se presenta una metodología de calibración de funciones BPR flujo-tiempo de espera, en paraderos de transporte público. En el caso de los paraderos simples, que fue analizado con mayor profundidad, se aproximan funciones BPR a las funciones analíticas derivadas por Gendreau a partir de la teoría de colas. Se ha concluido que los parámetros β y n de las funciones BPR para estos casos, dependen de las capacidades totales y libres de los

vehículos en el paradero. Esto tiene como consecuencia que las funciones BPR deban ser, en estricto rigor, diferentes para cada paradero de la línea.

En el caso de los paraderos múltiples, dado que no existen funciones analíticas para el tiempo de espera, el enfoque de calibración propuesto es generar para un paradero dado funciones flujo-tiempo de espera por simulación y luego aproximar a ellas funciones BPR. Si bien, dentro de los plazos de este trabajo no ha sido posible derivar experimentalmente las funciones que relacionan los parámetros β y n con las capacidades totales y libres de los vehículos de las distintas líneas que sirven a un paradero múltiple, para el rango de experimentos realizados es claro que existe una dependencia del mismo tipo que la derivada para paraderos simples. Aunque no se está en posición de generalizar este resultado, resulta evidente que para cada paradero existirán diferentes parejas de β y n .

RECONOCIMIENTOS

Los principales resultados presentados en este artículo son parte de un trabajo realizado para la Secretaría Ejecutiva de la Comisión Interministerial de Planificación de Inversiones en Infraestructura de Transporte (SECTRA).

REFERENCIAS

Bailey, N.T.J. (1954). "On Queueing with Bulk Service". J. Royal Stat. Soc. B. Vol. 16 pp 80-87.

De Cea, J. & Fernández, E. (1993). "Transit Assignment for Congested Public Transport System: An Equilibrium Model". Transportation Science, Vol. 27, N°2, pp 133-147.

Downton, F. (1955). "Waiting Time in Bulk Service Queue". J. Royal Stat. Soc. B. Vol. 17 pp 256-261.

Gendreau, M. (1984). "Étude Approfondie d'un Modèle d'Équilibre Pour L'Affectation Des Passagers Dans Les Réseaux de Transport en Commun". Thèse de Ph. D., Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, Université de Montréal, Canadá.

Law, A. M. y Kelton, W. D. (1991). "Simulation, Modeling & Analysis". Mc Graw-Hill International Editions.

Powell, W. B. (1981). "Stochastic Delays In Transportation Terminals: New Results in Theory And Application Of Bulk Queues". Ph. D. thesis, Department of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology, EE.UU.

SECTRA (1998), "Análisis y Calibración de Modelos de Asignación de Transporte Público con Restricción de Capacidad", Informe Técnico Final, Estudio Realizado por Fernández & De Cea Ingenieros Ltda. para SECTRA. Santiago, Chile.

APENDICE: RESULTADOS SIMULACION PARADERO MULTIPLE

A continuación se muestran los resultados de simulaciones hechas para el caso de paradero múltiple, para casos en que tanto las llegadas de buses como de pasajeros se consideran exponenciales de acuerdo a lo establecido en el punto 2. En particular se hará un análisis detallado de un paradero por el que pasan 2 líneas y por el que se supone que llegan todas las categorías posibles de usuarios (todas las secciones de líneas compiten por flujos).

En la Tabla A.1 se muestran los resultados de los parámetros ajustados (BPR) para el caso descrito dependiendo de diferentes tasas de llegadas de buses. En la Tabla A.1, la categoría 1 corresponde a aquella en que los usuarios le sirven los 2 buses, la categoría 2 aquella que le sirve sólo el primer bus y la categoría 3 es aquella que le sirve sólo el segundo bus.

Tabla A.1
Dos líneas, Tiempo sim. 540 min., 50 repeticiones

Tasas de llegada de los Buses (veh/min)		Categoría	t ₀	β	n
μ ₁	μ ₂				
0.05	0.05	1	9,83	33,64	6,01
0.05	0.05	2	18,92	28,04	5,04
0.05	0.05	3	19,20	34,33	5,90
0.1	0.1	1	4,83	16,49	5,54
0.1	0.1	2	9,83	18,77	5,98
0.1	0.1	3	9,70	17,60	5,58
0.2	0.2	1	2,48	10,39	6,30
0.2	0.2	2	4,96	11,78	6,36
0.2	0.2	3	9,69	10,89	6,09
0.3	0.3	1	1,65	6,80	6,08
0.3	0.3	2	3,31	6,97	5,95
0.3	0.3	3	3,32	6,92	5,81
0.4	0.4	1	1,23	4,34	5,69
0.4	0.4	2	2,48	4,91	5,88
0.4	0.4	3	2,46	4,53	5,56
0.5	0.5	1	0,99	3,73	5,67
0.5	0.5	2	1,98	3,63	5,30
0.5	0.5	3	1,98	4,17	5,69
0.6	0.6	1	0,82	3,45	6,03
0.6	0.6	2	1,65	3,43	5,77
0.6	0.6	3	1,64	3,67	5,96
0.7	0.7	1	0,71	2,87	6,03
0.7	0.7	2	1,42	3,14	5,77
0.7	0.7	3	1,42	3,08	5,96
0.8	0.8	1	0,61	2,37	5,85
0.8	0.8	2	1,23	2,39	5,61
0.8	0.8	3	1,24	2,48	5,74
1,0	1,0	1	0,50	1,93	6,46
1,0	1,0	2	0,99	2,19	6,33
1,0	1,0	3	0,99	2,03	6,20

Algunos resultados para diferentes casos de número de líneas llegando a diferentes frecuencias se muestran en las Tablas A.2 y A.4.

Tabla A.2
Dos líneas, Tiempo sim. 540 min., 50 repeticiones

Tasas de llegada de los buses (veh/min)		Categoría	t_0	β	n
μ_1	μ_2				
0,4	0,2	1	1,67	7,48	6,48
0,4	0,2	2	2,48	7,26	6,08
0,4	0,2	3	4,98	8,26	6,55
0,3	0,2	1	2,01	10,26	6,92
0,3	0,2	2	3,31	10,42	6,66
0,3	0,2	3	4,97	10,00	6,50
0,3	0,1	1	2,50	12,32	6,75
0,3	0,1	2	3,34	12,17	6,58
0,3	0,1	3	9,78	14,62	6,80
0,1	0,2	1	3,36	17,22	7,09
0,1	0,2	2	9,97	18,93	7,64
0,1	0,2	3	4,99	17,74	6,96
0,2	0,1	1	3,31	15,58	6,58
0,2	0,1	2	9,78	16,94	6,35
0,2	0,1	3	4,92	16,12	6,50

Las líneas que le sirven a cada categoría de la Tabla A.4 se muestran a continuación en la Tabla A.3 (una x significa que le sirve).

Tabla A.4

Tres líneas, Tiempo sim. 540 min., 50 repeticiones

Tabla A.3

Cat.	L 1	L 2	L 3
1	x	x	x
2	x	x	
3	x		x
4	x		
5		x	x
6		x	
7			x

Tasas de llegada de los buses (veh/min)			Categoría	t_0	β	n
μ_1	μ_2	μ_3				
0,1	0,1	0,1	1	3,31	15,34	6,86
0,1	0,1	0,1	2	4,96	16,19	7,05
0,1	0,1	0,1	3	5,00	16,49	7,10
0,1	0,1	0,1	4	9,96	18,70	7,67
0,1	0,1	0,1	5	4,98	15,18	6,82
0,1	0,1	0,1	6	9,66	14,68	6,40
0,1	0,1	0,1	7	9,85	15,78	6,79
0,2	0,2	0,2	1	1,66	7,52	6,79
0,2	0,2	0,2	2	2,49	7,90	6,90
0,2	0,2	0,2	3	2,47	7,19	6,39
0,2	0,2	0,2	4	4,93	6,67	5,94
0,2	0,2	0,2	5	2,48	7,60	6,74
0,2	0,2	0,2	6	5,03	9,07	7,66
0,2	0,2	0,2	7	9,46	6,80	6,06
0,3	0,3	0,3	1	1,11	5,70	7,20
0,3	0,3	0,3	2	1,66	5,70	7,03
0,3	0,3	0,3	3	1,66	5,88	7,23
0,3	0,3	0,3	4	3,26	5,62	6,78
0,3	0,3	0,3	5	1,67	5,71	7,10
0,3	0,3	0,3	6	3,31	5,49	6,70
0,3	0,3	0,3	7	3,35	6,51	7,61