

ESTRAUS: UN MODELO DE EQUILIBRIO SIMULTÁNEO PARA ANALIZAR IMPACTOS Y APOYAR LA EVALUACIÓN SOCIAL DE PLANES ESTRATÉGICOS DE TRANSPORTE URBANO

Joaquín de Cea Chicano, J. Enrique Fernández Larrañaga
Profesores Titulares, Departamento de Ingeniería de Transporte,
Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago Chile, e-mail jdc@ing.puc.cl

y

Alexandra Soto Ogueta
Ingeniero de Proyectos, Fernández & De Cea Ingenieros Limitada,
Santiago, Chile, e-mail fydcea@reuna.cl

RESUMEN

En este trabajo se presentan, en primer lugar, la formulación matemática y el algoritmo de solución de ESTRAUS, un modelo de equilibrio simultáneo de distribución, partición modal y asignación conjunta, que simula el comportamiento de un sistema multimodal de transporte urbano, con múltiples categorías de usuarios y propósitos de viaje, con restricción de capacidad de las vías y de los vehículos que prestan servicios de transporte público. Esta nueva formulación supone una estructura jerárquica más general para la distribución y partición modal de viajes, en comparación a la considerada en la versión actual del modelo.

Luego, se describe brevemente la importancia de ESTRAUS dentro de la metodología de evaluación de proyectos y planes estratégicos de transporte urbano desarrollada por el gobierno de Chile, y se discuten algunos problemas prácticos de aplicación, relacionados con los errores de convergencia propios de algoritmos iterativos de solución de modelos de este tipo, y sus posibles impactos en las estimaciones de indicadores de rentabilidad de un determinado plan.

Finalmente, se propone una modificación al algoritmo original que permite disminuir considerablemente los errores mencionados, en tiempos de ejecución aun razonables para esta clase de análisis. Los problemas tratados se ilustran con simulaciones realizadas para la ciudad de Santiago.

PALABRAS LLAVE

Equilibrio Simultáneo, Evaluación de Planes, Análisis Estratégico.

1. INTRODUCCION

Normalmente, ante problemas crecientes de congestión vehicular, a menudo unidos a muy serios problemas de contaminación, las autoridades gubernamentales enfrentan, en la mayoría de las grandes aglomeraciones urbanas, constantes demandas de parte de población y de muchos grupos de interés, referentes al mejoramiento de las condiciones de operación de los sistemas de transporte. Muchas de estas demandas se traducen en múltiples presiones para construir costosos proyectos de infraestructura tales como líneas de metro, autovías urbanas, sistemas de transporte público de tecnología intermedia, etc.

La autoridad, que debe ejercer su rol de planificación estratégica de desarrollo del sistema de transporte urbano, atendiendo al mismo tiempo a las demandas de mejoramiento, debe analizar continuamente planes definidos a partir de combinaciones de proyectos como los mencionados, insertos en determinados contextos de política de transporte y desarrollo urbano. Dichos planes involucran altas inversiones de recursos de capital que son cada vez más escasos y que siempre tienen importantes usos alternativos en diferentes áreas sociales tales como educación, salud, vivienda y otros.

Lo anterior ha motivado el desarrollo de herramientas de planificación que permitan simular el comportamiento de los sistemas de transporte urbano y predecir los impactos producidos por diferentes intervenciones de carácter estratégico, con el fin de ayudar a las autoridades pertinentes a tomar decisiones racionales.

En este artículo, se presentan brevemente dos elementos básicos de la metodología de evaluación de planes estratégicos de transporte urbano, desarrollada por el gobierno de Chile durante la segunda mitad de la década de los ochenta (ver SECTU, 1989; Fernández y De Cea, 1990): el modelo de equilibrio simultáneo (ESTRAUS) y el módulo de evaluación (VERDI).

La versión generalizada de ESTRAUS (aplicable a cualquier sistema de transporte urbano) combina distribución, partición modal y asignación para analizar redes con múltiples clases de usuarios y modos de transporte puros y combinados, considerando la restricción de capacidad de las vías de la red vial básica y la restricción de capacidad de los vehículos con los que se prestan servicios de transporte público. Las elecciones de destino y modo, **que pueden suponerse simultáneas o secuenciales**, tienen una estructura jerárquica, con modelos de distribución doblemente acotados basados en la maximización de la entropía, y de partición modal de tipo logit jerárquico. La versión actual de ESTRAUS corresponde al caso particular en que las decisiones de destino y modo son simultáneas.

Su característica más distintiva respecto a la extensa literatura especializada sobre el tema (ver por ejemplo revisiones realizadas por Fernández y Friesz, 1983; Florian, Wu y He, 1999) es la consideración de la restricción de capacidad del transporte público, de una forma en que es posible implementar algoritmos de solución eficientes para tratar redes de gran tamaño.

El módulo de evaluación de planes (VERDI) utiliza como datos de entrada los principales resultados de ESTRAUS. A partir de ellos, y de otros antecedentes que no provienen directamente del modelo de simulación (por ejemplo, beneficios por ahorro de accidentes) estima los beneficios de un plan determinado, medidos respecto de una situación de referencia

a la que se denomina “situación base”. El análisis beneficio costo lo realiza mediante dos métodos alternativos. El primero permite calcular el beneficio neto social, considerando la disposición a pagar de los usuarios, el beneficio de los productores, las inversiones y los costos de operación privados y sociales. El segundo método (correspondiente al enfoque tradicional) considera como beneficios de un plan los ahorros de recursos físicos y de tiempo consumido, y como costos el valor de las inversiones involucradas.

En las secciones que siguen, se describe en primer lugar la formulación matemática de la última versión de ESTRAUS y su algoritmo de solución, y se analiza, usando ejemplos de aplicación para Santiago, cómo afecta la convergencia del modelo de equilibrio a las estimaciones de los principales impactos de un plan estratégico y de sus indicadores de rentabilidad.

2. MODELO MATEMÁTICO Y ALGORITMO DE SOLUCIÓN

2.1 Definición de Redes y Funciones de Costos

La red vial, sobre la que circulan los vehículos de transporte privado y los que prestan servicios de transporte público, está representada por $G=(N,A)$, donde N es el conjunto de nodos y A el conjunto de arcos. Se define $c_a^{kp\tilde{m}}$ al costo medio de operación en el arco a para usuarios de clase k , con propósito de viaje p , del modo de transporte privado \tilde{m} (por ejemplo automóvil, taxi, etc.), como una función de la suma de los flujos vehiculares de usuarios de todos los modos de transporte privado, de todas las categorías de usuarios y propósitos de viaje ($f_a^{kp\tilde{m}}$) y del flujo fijo de vehículos de transporte público (\bar{F}_a), en vehículos equivalentes, para el arco a :

$$c_a^{kp\tilde{m}} = c_a^{kp\tilde{m}} \left(\sum_k \sum_p \sum_{\tilde{m}} f_a^{kp\tilde{m}}, \bar{F}_a \right) \quad (1)$$

Es importante notar que, aunque el Jacobiano del vector de funciones de costo para el transporte privado es no diagonal, dada la forma supuesta para las funciones $c_a^{kp\tilde{m}}$, éste resulta ser simétrico (todos los vehículos, cualquiera sea la categoría de usuarios, el propósito del viaje y el modo de transporte privado, producen igual impacto en la congestión).

Para cada modo puro \bar{m} de transporte público, se definen redes puras de servicios $G=(N_{\bar{m}}, S_{\bar{m}})$ donde $N_{\bar{m}}$ es el conjunto de nodos ($N_{\bar{m}}=N$ para servicios de superficie que usan la red vial, tales como buses y taxicolectivos, y $N_{\bar{m}}=N'$, con $N \cap N' = \phi$ para redes de transporte público independiente, como el metro) y $S_{\bar{m}}$ el conjunto de *arcos de transporte público* para el modo \bar{m} . A continuación se explica el concepto de *arco de transporte público*, que es básico para entender cómo se considera la restricción de capacidad de los vehículos. Para ver detalles referirse a De Cea y Fernández (1993).

Considérense dos nodos A y B tales que existe un conjunto L_1 de servicios de transporte público que permiten llegar a B desde A , sin realizar transbordos ($L_1 = \{l_1, l_2, l_3, \dots, l_n\}$). Esto es, entre A y B opera un conjunto de *secciones de línea* (tramo de una línea entre dos nodos no necesariamente consecutivos de su trazado), como se observa en la figura 1.

Para representar el hecho que los viajeros seleccionan un subconjunto de las líneas de L_1 (subconjunto de líneas *atractivas*) para desplazarse desde A a B , y al mismo tiempo tomar en cuenta la restricción de capacidad de los vehículos, la situación anterior se modela de la siguiente forma (ver De Cea y Fernández, 1993).

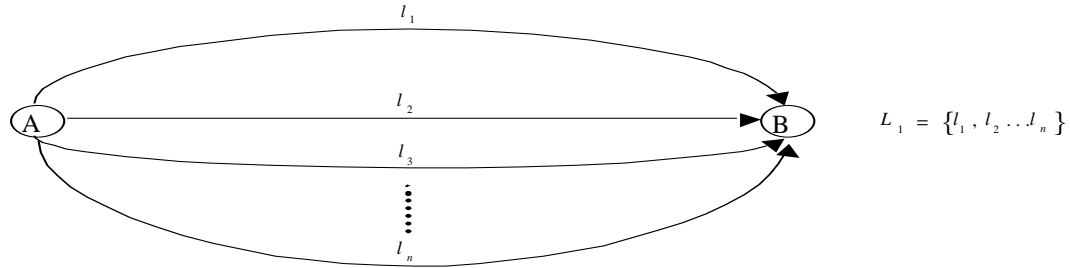


Figura 1: Secciones de Línea entre Dos Nodos

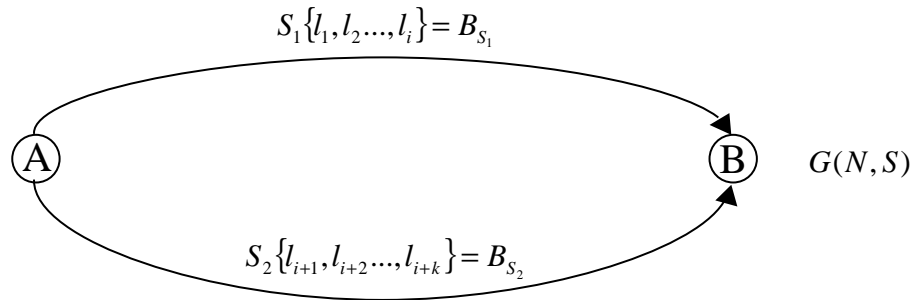


Figura 2: Arcos de Transporte Público Red $G(N,S)$

El primer *arco de transporte público*, S_1 , representa el conjunto de *líneas rápidas*, B_{S_1} , y corresponde al conjunto de líneas que permite minimizar el tiempo (costo) generalizado de viaje sin considerar restricción de capacidad de los vehículos. El segundo arco de transporte público, S_2 , representa el conjunto de *líneas lentas*, B_{S_2} .

Las funciones de tiempo (costo) generalizado de estos arcos de transporte público (suma del tiempo de viaje, tiempo de espera, tiempo de transbordo, tarifa, etc.), son dependientes de los flujos de vehículos sobre la red vial y de pasajeros sobre los servicios existentes, como se muestra a continuación:

$$c_s^{kp\bar{m}} = \varphi^{kp\bar{m}} \left(\sum_k \sum_p \sum_{\bar{m}} f_a^{kp\bar{m}}, \bar{F}_a, \forall a \in l, l \in B_{s_{\bar{m}}} \right) + (P_{TAR})^{kp\bar{m}} \cdot (TAR)_s^{\bar{m}} + (P_{WAIT})^{kp\bar{m}} \left[\frac{\alpha^{\bar{m}}}{d_s^{\bar{m}}} + \beta^{\bar{m}} \left(\frac{V_s^{kp\bar{m}} + \tilde{V}_s^{kp\bar{m}}}{(CAP)_s^{\bar{m}}} \right)^{n^{\bar{m}}} \right] \quad (2)$$

donde, además de la notación ya definida:

$c_s^{kp\bar{m}}$: costo medio o generalizado en el arco s para usuarios de clase k , con propósito p , del modo de transporte público \bar{m} (por ejemplo bus, metro, taxicolectivo, etc.).

- $(P_{TAR})^{kp\bar{m}}$: ponderador de la tarifa para usuarios de clase k , con propósito de viaje p , del modo de transporte público \bar{m} .
- $(TAR)_s^{\bar{m}}$: tarifa asociada al arco de transporte público s para el modo \bar{m} .
- $(P_{WAIT})^{kp\bar{m}}$: ponderador del tiempo de espera para usuarios de clase k , con propósito de viaje p , del modo de transporte público \bar{m} .
- $\alpha^{\bar{m}}, \beta^{\bar{m}}, n^{\bar{m}}$: parámetros de calibración de la función de tiempo de espera para el modo de transporte público \bar{m} .
- $d_s^{\bar{m}}$: frecuencia de vehículos del modo de transporte público \bar{m} sobre el arco de transporte público s .
- $(CAP)_s^{\bar{m}}$: capacidad del arco de transporte público s para el modo de transporte público \bar{m} .
- $V_s^{kp\bar{m}}$: flujo de pasajeros de clase k , con propósito de viaje p , pertenecientes al modo de transporte público \bar{m} , que usan el arco de transporte público s .
- $\tilde{V}_s^{kp\bar{m}}$: flujo de pasajeros que compite con $V_s^{kp\bar{m}}$ por la capacidad de las líneas de B_s (flujos correspondientes al mismo propósito, categoría, modo, pertenecientes a otros arcos de transporte público que compiten o quitan capacidad de las líneas de B_s , más flujos de otros propósitos, categorías y modos que también compiten por la capacidad de las líneas B_s).

Es fácil ver que el Jacobiano del vector de funciones de costo, en este caso, es no diagonal y asimétrico.

El modelo considera, además, la existencia de modos combinados, por ejemplo auto-metro (transporte privado - transporte público) o bus-metro (transporte público - transporte público). En cada caso, la red del modo combinado corresponde a la unión de las redes de los modos puros que las conforman. Sólo para hacer menos engorrosa la notación y favorecer la comprensión de la formulación que sigue, se considerarán modos combinados (m^c) formados por dos modos de transporte público. Sin embargo, es necesario recalcar que esto no resta generalidad al modelo, ya que no hay problemas por tratar combinaciones auto-transporte público.

2.2 Condiciones de Equilibrio de Flujos

El supuesto básico del modelo, respecto del equilibrio de flujos en las redes, es que para cada modo, sobre su respectiva red, cada usuario elige su ruta de acuerdo al *primer principio de Wardrop* (cada individuo trata de minimizar su costo de operación o costo medio generalizado de viaje). Esto da lugar a las siguientes condiciones de equilibrio:

$$C_r^{kpm*} - u_w^{kpm*} \begin{cases} = 0 & \text{si } h_r^{kpm*} > 0 \\ \geq 0 & \text{si } h_r^{kpm*} = 0 \end{cases}; \quad \forall r \in P_w^m, w \in W, k, p \quad (3)$$

Lo anterior significa que las rutas con flujos, tienen costos iguales mientras aquellas que no tienen flujos presentan costos iguales o mayores que el costo mínimo u_w^{kpm*} . Además, P_w^m es el conjunto de rutas entre el par w para el modo m .

2.3 Condiciones de Equilibrio de Viajes.

Antes de explicitar las condiciones de equilibrio para la demanda, la figura 3 ilustra una rama del árbol de decisión para un par origen-destino w dado, una clase de usuario k y un propósito de viaje p . Desde el nivel más alto del árbol de decisión *cuelgan*, tantas ramas equivalentes a la representada en la figura, como combinaciones de pares origen-destino w , clases de usuario k y propósitos de viaje p , existan. En el nivel superior de la rama en la figura, están representadas las decisiones de destino por propósito de viaje y clase de usuario, y en el nivel inferior (en realidad en los dos niveles inferiores) las decisiones de modo en una estructura logit de dos niveles.

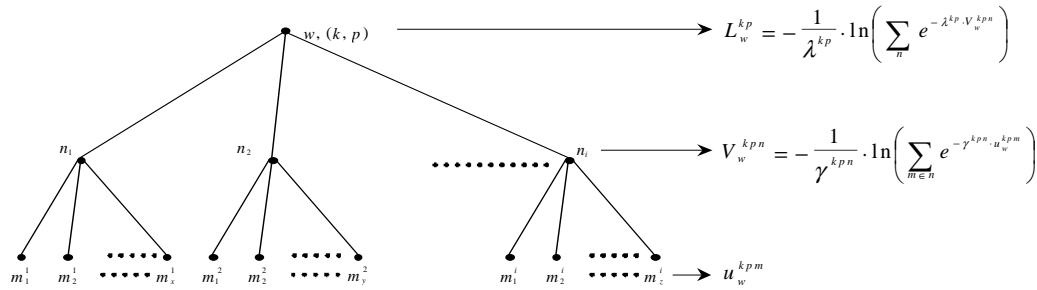


Figura 3: Ilustración del Arbol de Decisión del Modelo de Demanda

En cada nivel del árbol se muestra la función de utilidad (desutilidad) correspondiente. En el nivel inferior, cada modo m tiene asociada una desutilidad u_w^{kpm} (costo de viaje entre el par w para usuarios de clase k , propósito p y modo de transporte m). El conjunto de modos está agrupado en diferentes nidos (partición modal con estructura jerárquica de dos niveles), con desutilidad V_w^{kpn} . El nivel superior es el correspondiente a la elección de destino, con costos compuestos L_w^{kp} . En el equilibrio debe cumplirse lo siguiente:

- Distribución

$$T_w^{kp*} = A_i^{kp} O_i^{kp} B_j^p D_j^p e^{-\beta^{kp} \cdot L_w^{kp*}} \quad (4)$$

- Proporción de viajes de un modo m dentro de un nido n

$$P_w^{kpm*} = \frac{T_w^{kpm*}}{T_w^{kpn*}} = \frac{e^{-\gamma^{kpn} u_w^{kpm*}}}{\sum_{m \in n} e^{-\gamma^{kpn} u_w^{kpm*}}} \quad (5)$$

- Proporción de viajes en nido n respecto del total de viajes

$$P_w^{kpn*} = \frac{T_w^{kpn*}}{T_w^{kp*}} = \frac{e^{-\lambda^{kp} V_w^{kpn*}}}{\sum_n e^{-\lambda^{kp} V_w^{kpn*}}} \quad (6)$$

2.4 Formulación Matemática y Algoritmo de Solución

Las condiciones de equilibrio (3) a (6) pueden formularse también mediante una desigualdad variacional del siguiente tipo:

$$c(X^*)^T (X - X^*) - g(T^*)^T (T - T^*) \geq 0, \quad \forall X, T \text{ factibles} \quad (P1)$$

donde:

- X : vector de flujos sobre los arcos de la red multimodal.
- X^* : vector de flujos de equilibrio sobre los arcos de la red multimodal.
- T : vector de viajes entre pares origen-destino de la red multimodal.
- T^* : vector de viajes de equilibrio entre pares o-d de la red multimodal.
- $c(X)$: vector columna de funciones de costo en los arcos de la red (con Jacobiano no diagonal y asimétrico).
- $g(T)$: vector de funciones inversas de demanda o transformadas de demanda (con Jacobiano diagonal).

Como se ha mencionado en la sección 2.1 las funciones de costo en los arcos de transporte público son asimétricas (Jacobiano del vector de funciones de costo asimétrico). Por lo tanto, no existe un problema de optimización equivalente al problema variacional P-1, basado en la transformada de Beckman. Para resolver este problema se puede utilizar el algoritmo de planos cortantes propuesto por Nguyen y Dupuis (1984) o cualquier otro método de solución de desigualdades variacionales (ver Harker y Pang, 1987). ESTRAUS usa el de diagonalización (ver Florian, 1983; Abdulaal y Leblanc, 1979), que es uno de los métodos más utilizados para resolver problemas de este tipo.

La diagonalización de las funciones de costo c_s^{kpm} da lugar a funciones \hat{c}_s^{kpm} dependientes de su propio flujo ($\hat{c}_s^{kpm} = \hat{c}_s^{kpm}(V_s^{kpm})$). A continuación se presenta el problema de optimización equivalente para el problema diagonalizado:

$$\begin{aligned} \min Z = & \sum_k \sum_p \sum_{\tilde{m}} \sum_a \int_0^{f_a^{kpm}} c_a^{kpm}(x) dx + \sum_k \sum_p \sum_{\bar{m}} \sum_s \int_0^{V_s^{kpm}} \hat{c}_s^{kpm}(x) dx \\ & + \sum_k \sum_p \sum_{m^c} \sum_s \int_0^{V_s^{kpm^c}} \hat{c}_s^{kpm^c}(x) dx \\ & + \sum_k \sum_p \frac{1}{\beta^{kp}} \sum_w T_w^{kp} (\ln T_w^{kp} - 1) - \sum_k \sum_p \frac{1}{\lambda^{kp}} \sum_w T_w^{kp} (\ln T_w^{kp} - 1) \\ & + \sum_k \sum_p \sum_n \frac{1}{\lambda^{kp}} \sum_w T_w^{kpn} (\ln T_w^{kpn} - 1) - \sum_k \sum_p \sum_n \frac{1}{\gamma^{kpn}} \sum_w T_w^{kpn} (\ln T_w^{kpn} - 1) \\ & + \sum_k \sum_p \sum_n \frac{1}{\gamma^{kpn}} \sum_{m \in n} \sum_w T_w^{kpm} (\ln T_w^{kpm} - 1) \end{aligned} \quad (7)$$

s.a.:

$$T_w^{kp} = \sum_n T_w^{kpn}, \quad \forall w, k, p \quad (u_w^{kp}) \quad (8)$$

$$T_w^{kpn} = \sum_{m \in n} T_w^{kpm}, \quad \forall w, k, p, n \quad (u_w^{kpn}) \quad (9)$$

$$T_w^{kpm} = \sum_{r \in P_w^m} h_r^{kpm}, \quad \forall w, k, p, m \quad (u_w^{kpm}) \quad (10)$$

$$O_i^{kp} = \sum_j T_w^{kp}, \quad \forall i, k, p \quad (\mu_j^{kp}) \quad (11)$$

$$D_j^p = \sum_k \sum_i T_w^{kp}, \quad \forall j, p \quad (\eta_j^p) \quad (12)$$

A las restricciones (8)-(12) deben agregarse además las restricciones de no negatividad de flujos, las relaciones entre flujos en rutas y flujos en arcos, y las restricciones de repartición de flujos en arcos de transporte público a secciones de línea.

Es fácil ver que, si la distribución y la partición modal se dan a un mismo nivel jerárquico ($\beta^{kp} = \lambda^{kp}$), el cuarto y quinto término de la función objetivo (7) desaparecen. Por otra parte, si además el modelo de partición modal, en lugar de ser jerárquico, fuera un logit multinomial, desaparecerían también el sexto y séptimo término de (7). Así, la versión general correspondiente a la estructura de decisiones ilustrada en la Figura 3 de la sección (d), colapsa a estructuras más simples dependiendo de los valores de calibración de los parámetros β^{kp} , λ^{kp} y γ^{kpn} . La versión operacional actual de ESTRAUS considera el caso particular en que $\beta^{kp} = \lambda^{kp}$. El caso más general presentado en este artículo está aun en etapa de desarrollo.

2.5 Condiciones de Optimalidad del Problema Diagonalizado

Las condiciones de optimalidad del problema diagonalizado se obtienen construyendo el Lagrangeano L con la función objetivo (7) y restricciones (8)-(12), multiplicadas por sus respectivas variables duales. Derivando L respecto de h_r^{kpm} , se reproducen las condiciones de *Wardrop* para cada modo puro o combinado. En tanto, si se deriva L respecto a las variables de demanda T_w^{kp} , T_w^{kpn} y T_w^{kpm} , e igualando a cero, se obtienen las restantes condiciones de equilibrio del problema. En el equilibrio, si T_w^{kp} , T_w^{kpn} y $T_w^{kpm} > 0$ se deberá cumplir que:

$$\frac{\partial L}{\partial T_w^{kp}} = \frac{1}{\beta^{kp}} \ln T_w^{kp} - \frac{1}{\lambda^{kp}} \ln T_w^{kp} + u_w^{kp} - \mu_i^{kp} - \eta_j^p = 0 \quad \forall w, k, p \quad (13)$$

$$\frac{\partial L}{\partial T_w^{kpn}} = \frac{1}{\lambda^{kp}} \ln T_w^{kpn} - \frac{1}{\gamma^{kpn}} \ln T_w^{kpn} - u_w^{kp} + u_w^{kpn} = 0 \quad \forall w, k, p, n \quad (14)$$

$$\frac{\partial L}{\partial T_w^{kpm}} = \frac{1}{\gamma^{kpn}} \ln T_w^{kpm} - u_w^{kpn} + u_w^{kpm} = 0 \quad \forall w, k, p, m \quad (15)$$

De la expresión (15) se desprende que:

$$T_w^{kpm} = e^{\gamma^{kpn}(u_w^{kpn} - u_w^{kpm})} = e^{\gamma^{kpn} u_w^{kpn}} e^{-\gamma^{kpn} u_w^{kpm}} \quad \forall w, k, p, n \quad (16)$$

Introduciendo (16) en (9) se obtiene:

$$T_w^{kpn} = \sum_{m' \in n} T_w^{kpm'} = e^{\gamma^{kpn} u_w^{kpn}} \sum_{m' \in n} e^{-\gamma^{kpn} u_w^{kpm'}} \quad \forall w, k, p, m \quad (17)$$

Finalmente, dividiendo las expresiones (16) y (17) se obtiene la **proporción de viajes de un modo dentro de su nido**:

$$P_w^{kpm} = \frac{T_w^{kpm}}{T_w^{kpn}} = \frac{e^{-\gamma^{kpn} u_w^{kpm}}}{\sum_{m' \in n} e^{-\gamma^{kpn} u_w^{kpm'}}} \quad \forall w, k, p, m \quad (18)$$

Por otra parte, sumando (14) y (15):

$$\frac{1}{\lambda^{kp}} \ln T_w^{kpn} - \frac{1}{\gamma^{kpn}} \ln T_w^{kpn} - u_w^{kp} + \frac{1}{\gamma^{kpn}} \ln T_w^{kpm} + u_w^{kpn} = 0 \quad \forall w, k, p, n, m \in n \quad (19)$$

$$T_w^{kpm} = e^{-\gamma^{kpn} \left(\frac{1}{\lambda^{kp}} \ln T_w^{kpn} - \frac{1}{\gamma^{kpn}} \ln T_w^{kpn} - u_w^{kp} \right)} e^{-\gamma^{kpn} u_w^{kpm}} \quad \forall w, k, p, n, m \in n \quad (20)$$

Sumando (20) $\forall m' \in n$ y sacando logaritmo natural se obtiene:

$$\frac{1}{\gamma^{kpn}} \ln T_w^{kpm} = -\frac{1}{\lambda^{kp}} \ln T_w^{kpn} + \frac{1}{\gamma^{kpn}} \ln T_w^{kpn} + u_w^{kp} - V_w^{kpn} \quad \forall w, k, p, n \quad (21)$$

De (21):

$$V_w^{kpn} = -\frac{1}{\lambda^{kp}} \ln T_w^{kpn} + u_w^{kp} \quad \forall w, k, p, n \quad (22)$$

y de (22):

$$T_w^{kpn} = e^{-\lambda^{kp} V_w^{kpn}} e^{\lambda^{kp} u_w^{kp}} \quad \forall w, k, p, n \quad (23)$$

Introduciendo (23) en (8) y dividiendo (23) por la expresión resultante se obtiene:

$$P_w^{kpm} = \frac{T_w^{kpm}}{T_w^{kpn}} = \frac{e^{-\lambda^{kp} V_w^{kpm}}}{\sum_{m' \in n} e^{-\lambda^{kp} V_w^{kpm'}}} \quad \forall w, k, p, n \quad (24)$$

que es la **proporción de viajes de un nido n respecto al total de viajes**.

Reordenando la ecuación (13) resulta:

$$\ln T_w^{kp} = \beta^{kp} \left(\frac{1}{\lambda^{kp}} \ln T_w^{kp} - u_w^{kp} + \mu_i^{kp} + \eta_j^p \right) \quad \forall w, k, p \quad (25)$$

$$T_w^{kp} = e^{\beta^{kp} \left(\frac{1}{\lambda^{kp}} \ln T_w^{kp} - u_w^{kp} \right)} e^{\beta^{kp} \mu_i^{kp}} e^{\beta^{kp} \eta_j^p} \quad \forall w, k, p \quad (26)$$

Por otro lado, de (24):

$$T_w^{kp} = e^{\lambda^{kp} u_w^{kp}} \sum_{n'} e^{-\lambda^{kp} V_w^{kp n'}} \quad \forall w, k, p \quad (27)$$

Sacando logaritmo natural a (27) y reordenando:

$$\ln T_w^{kp} = \lambda^{kp} u_w^{kp} + \ln \sum_{n'} e^{-\lambda^{kp} V_w^{kp n'}} \quad \forall w, k, p \quad (28)$$

$$L_w^{kp} = u_w^{kp} - \frac{1}{\lambda^{kp}} \ln T_w^{kp} \quad \forall w, k, p \quad (29)$$

Finalmente, reemplazando (29) en (26):

$$T_w^{kp} = e^{-\beta^{kp} L_w^{kp}} e^{\beta^{kp} \mu_i^{kp}} e^{\beta^{kp} \eta_j^p} = A_i^{kp} O_i^{kp} B_j^p D_j^p e^{-\beta^{kp} L_w^{kp}} \quad \forall w, k, p \quad (30)$$

De lo anterior, se desprende que si el algoritmo de diagonalización converge se obtiene una solución de equilibrio que cumple con las condiciones establecidas para nuestro problema de equilibrio simultáneo (ecuaciones 3,4,5 y 6). Es importante hacer notar que en todas las aplicaciones realizadas en Chile para grandes redes, con funciones de costo asimétricas (asignación de equilibrio en redes de transporte público con restricción de capacidad; distribución, partición modal y asignación conjuntas en redes interurbanas de transporte de carga y redes urbanas de pasajeros) el algoritmo ha convergido muy satisfactoriamente.

3. ESTRAUS COMO HERRAMIENTA DE APOYO A LA EVALUACIÓN DE PLANES

3.1 Breve Descripción del Módulo de Evaluación VERDI

Para poder cuantificar la bondad económica de un plan estratégico de transporte urbano (que, en el límite, puede estar constituido por un solo proyecto estratégico) se ha desarrollado VERDI, como un complemento de ESTRAUS. Entre las opciones ofrecidas por VERDI destacan la evaluación privada de proyectos estratégicos y la evaluación social de proyectos y planes estratégicos. En este último caso ofrece dos enfoques alternativos: “evaluación de beneficio a usuarios” y “evaluación clásica”.

En el enfoque de “evaluación de beneficio a usuarios” los beneficios del proyecto o plan evaluado se estiman como la suma de los excedentes de los consumidores y productores. De este modo, los beneficios se obtienen del cambio de bienestar de los usuarios y el cambio en el beneficio de las empresas productoras de los servicios (medido en unidades monetarias), como consecuencia de los impactos producidos por las nuevas facilidades de transporte, sobre la operación del sistema.

Por su parte el enfoque de “evaluación clásica” los beneficios del proyecto o plan evaluado se obtienen directamente del cómputo de las diferencias en el consumo de recursos entre las situaciones sin y con proyecto, valorados a precios sociales. Es decir, se mide la cantidad de recursos liberados, como consecuencia de los impactos producidos por las nuevas facilidades de transporte.

VERDI fue diseñado para utilizar los datos entregados por ESTRAUS y datos exógenos relacionados con los costos de operación, con otros costos no estimados por el modelo de simulación y con las inversiones demandadas por los proyectos o planes evaluados. Entrega como resultados algunos indicadores económicos, que permiten calificar cuantitativamente la bondad de los planes estudiados.

Sobre la base del cálculo de beneficios y costos del sistema se comparan dos situaciones llamadas “base” y “opción” (supone la concreción de los proyectos) para períodos representativos del día (por ejemplo punta mañana y fuera de punta) en dos o mas cortes temporales para el horizonte de evaluación. Usando factores de expansión calculados exógenamente, el modelo normaliza los resultados horarios de ESTRAUS a unidades monetarias anuales.

3.2 Comentarios Sobre el Nivel de Error de los Indicadores Económicos

Cualquiera sea el enfoque de evaluación social que se utilice, una parte muy importante de los beneficios de un determinado proyecto o plan se calculan a partir de las diferencias de ciertos valores obtenidos como resultado de simulaciones realizadas con ESTRAUS, para las situaciones “base” y “opción”, en distintos períodos del día y cortes temporales. A continuación se hace referencia, sin embargo, sólo al enfoque de "evaluación clásica" con el fin de ilustrar los problemas de precisión que pueden afectar a los indicadores económicos. Más aun, nos concentraremos, **a modo de ejemplo**, en el análisis del nivel de error asociado a las estimaciones de ahorro de tiempo de los usuarios del sistema, puesto que normalmente éste constituye el principal ahorro de recursos resultante de la implementación de un proyecto o plan estratégico de transporte.

Por cierto, no se pretende sugerir que ésta sea la única fuente de error de las estimaciones de indicadores de rentabilidad de un plan. Ni siquiera que sea la más importante (existen normalmente, por citar algunas fuentes adicionales, beneficios y costos no considerados, errores asociados a los costos de inversión, errores asociados a cada uno de los parámetros de los distintos submodelos del modelo de simulación, comportamientos no completamente de acuerdo a las hipótesis supuestas, errores de predicción, etc.). Sólo se trata de mostrar que en determinadas situaciones lo que se mide (ahorro de tiempos por ejemplo) puede tener asociado un error relevante, lo que demanda analizar muy cuidadosamente los resultados que se obtienen.

Como se ha mencionado, el ahorro de tiempo de viaje de los usuarios, para un período determinado, se obtiene como la diferencia de los tiempos totales de viaje consumidos en el sistema en la situación base y en la opción, los que a su vez se obtienen simulando con ESTRAUS cada una de esas situaciones. Debido a esto, es importante recordar que los resultados de un modelo de este tipo, al ser obtenidos mediante un algoritmo iterativo que

converge a la solución de equilibrio (niveles de servicio, flujos origen-destino por modo y flujos en arcos para las diferentes redes consideradas) tienen necesariamente asociado un cierto nivel de error (**error de convergencia**). Las expresiones que siguen son indicadores usados normalmente para medir el error ponderado (en porcentaje) de flujos en arcos (31.a) y viajes origen-destino (31.b) entre dos iteraciones sucesivas, I e I+1, del algoritmo de diagonalización (obviamente en los denominadores de estas expresiones no se incluyen los arcos o los pares origen-destino para los que ambos flujos o viajes son nulos):

$$e_f = \frac{\sum_{a \in A} |f_a^{I+1} - f_a^I|}{\sum_{a \in A} \frac{f_a^{I+1} + f_a^I}{2}} \times 100 \quad (a), \quad e_T = \frac{\sum_{w \in W} |T_w^{I+1} - T_w^I|}{\sum_{w \in W} \frac{T_w^{I+1} + T_w^I}{2}} \times 100 \quad (b) \quad (31)$$

En estricto rigor, para una simulación determinada, la solución sería exacta (errores iguales a 0%) si para dos iteraciones sucesivas se obtienen flujos y matrices de viajes idénticas, con lo que también resultarían idénticos los niveles de servicio para los arcos de las redes y para cada par origen-destino del área de estudio. Obviamente no es posible alcanzar dicha exactitud para redes de gran tamaño. Si bien en un número razonable de iteraciones se pueden obtener bajos errores de convergencia (por ejemplo en el caso de Santiago con alrededor de 30 iteraciones de diagonalización se obtienen errores menores al 1% para flujos en arcos y menores al 0,5% para matrices de viaje), disminuir aun más dichos errores o bien requiere de un altísimo número de iteraciones o lo que es peor, al variar entre iteraciones sucesivas las matrices de viajes y los flujos en arcos los errores oscilan, y en ocasiones divergen. Esto significa que en la práctica el modelador debe "conformarse" con alcanzar soluciones "cercanas" al óptimo (equilibrio). En el caso de la red de Santiago, el criterio normalmente usado para detener el algoritmo es, como se ha mencionado, error máximo de 1% para los flujos en arcos (se calcula el error para cada red y éste debe ser en todos los casos menor que 1%) y de 0,5% para viajes origen-destino (se calcula el error para cada modo y éste debe ser en todos los casos menor que 0,5%).

El criterio de parada mencionado es más estricto que los criterios reportados para el análisis de redes del tamaño de la usada en Santiago y resulta completamente adecuado si interesa conocer impactos de un proyecto estratégico en la distribución de viajes, particiones modales, afluencia en los servicios de transporte público, cambios relevantes en la asignación sobre las diferentes redes, etc. Sin embargo, si lo que interesa es usar los resultados de las simulaciones para evaluación social, donde se requiere estimar, por ejemplo, ahorros de tiempos entre una base y una opción, incluso errores como los señalados pueden inducir errores significativos en la estimación de dicho ahorro, dependiendo de su magnitud en relación a los consumos totales del sistema en la base y en la opción. En no pocas ocasiones, dos simulaciones diferentes con errores de convergencia de flujos en arcos menores al 1%, el error en los tiempos de viaje en el sistema (por ejemplo para los automovilistas) puede alcanzar valores de entre 1% y 5%, con lo que la estimación del ahorro de tiempo puede presentar errores del orden del 100%.

Lo anterior se debe, básicamente, a dos causas: a) el ahorro que se desea estimar es la diferencia entre dos tiempos totales (tiempo total de viaje en la base menos tiempo total de viaje en la opción), en las que el minuendo y el sustraendo presentan un error de

convergencia, y b) dada la forma de las funciones de costo tipo BPR (tiempos de viaje) un mismo valor de los indicadores de flujo (por ejemplo dos simulaciones con $e_f = 1,0\%$) pueden presentar errores significativamente diferentes en los tiempos de viaje, dependiendo si las principales diferencias de flujos en arcos se presentan en arcos con poco flujo en comparación a su capacidad (parte constante de la curva BPR) o en arcos saturados o cercanos a la saturación.

Debido a los problemas mencionados, resulta evidente que cuando se trata de evaluar planes es necesario considerar para ESTRAUS criterios de convergencia bastante más estrictos que los aceptados normalmente. No obstante, como se mencionó anteriormente, en la mayoría de los casos en que se trabaja con redes de gran tamaño es muy costoso lograr simultáneamente errores significativamente menores del 1% para flujos y 0,5% para viajes origen-destino. Analizando la evolución de dichos errores con el número de iteraciones, se ha observado que la convergencia deseada para los viajes se alcanza en un número razonable de iteraciones (entre 20 y 30 para la red de Santiago se alcanzan errores del 0,3%, **para el modo con mayor error**), mientras la convergencia de flujos en arcos se hace oscilante en torno al 1%.

Dicho comportamiento sugiere que las matrices de viajes por modo podrían dejarse fijas cuando su error asociado, para dos iteraciones sucesivas, no exceda por ejemplo de 0,2 a 0,3% para el modo con mayor error, continuándose en las iteraciones siguientes sólo con una asignación de equilibrio multimodal. Como se verá luego, al examinar los resultados de las simulaciones ejemplo para Santiago, el error de flujos en arcos puede alcanzar de esta forma niveles inferiores al 0,1%, lo que es imposible de obtener si las matrices continúan el proceso de equilibrio.

3.3 Ejemplos de Aplicación en Santiago de Chile

Con el objeto de ilustrar el efecto de los errores de convergencia en la estimación de los ahorros de tiempo entre un plan y la situación base, se ha considerado una base para Santiago, para el período punta de la mañana, en el corte temporal 2005. Sobre ella se han considerado dos planes alternativos. En ambos casos se ha agregado a la base un solo proyecto (una línea de metro de alrededor de 10 kms). El Plan 1 incluye un proyecto de metro de bajo impacto, que atrae una demanda, más bien baja, desde el modo bus principalmente, sin producir un impacto relevante sobre los viajes en automóvil. El Plan 2 considera una línea de metro que atrae una muy importante cantidad de viajes, principalmente desde los modos de transporte público, sin embargo también atrae una cifra significativa de usuarios del automóvil. En resumen, el ahorro de tiempo debido a la implementación del Plan 1 sería bajo, en tanto el que generaría el Plan 2 es muy significativo.

La Tabla 1 muestra las estimaciones del consumo total de tiempo obtenidas con ESTRAUS (para la base y ambos planes, para el período punta de la mañana en el año 2000) y los ahorros estimados para cada Plan respecto de la base, para tres niveles diferentes de convergencia del algoritmo de diagonalización: a) 1% para los flujos en arcos y 0,5% para los viajes O/D por modo; b) 0,1 % para los flujos en arcos y 0,3% para los viajes O/D por modo; c) 0,01 % para los flujos en arcos y 0,3% para los viajes O/D por modo. En el segundo y tercer casos, se usa una modificación del algoritmo original de diagonalización. En primer lugar se realizan las iteraciones normales necesarias para alcanzar una convergencia de 0.3% en los viajes O/D por modo, y a partir de ese momento se fijan dichas matrices y se continúa

iterando solamente para alcanzar equilibrio en las redes hasta llegar a convergencias de 0,1% y 0,01% para los flujos en arcos respectivamente (asignación sobre la red multimodal, con matrices de demanda fijas).

4. CONCLUSIONES

En las secciones anteriores se ha presentado un modelo de equilibrio oferta-demanda para analizar sistemas multimodales de transporte urbano, con múltiples clases de usuarios. También se ha mostrado cómo este modelo puede ser usado para evaluar planes estratégicos de transporte urbano, y se han discutido los problemas que se pueden presentar al realizar evaluaciones debido a la existencia de errores de convergencia normales para algoritmos del tipo del que se ha implementado. La principal conclusión del trabajo es que si ESTRAUS es usado para evaluar planes, deben aceptarse muy bajos errores de convergencia (del orden de 0,01% a 0,1%) para los flujos en los arcos, con el fin de obtener estimaciones confiables de ahorros de tiempo (es importante constatar que para el plan de bajo impacto, para errores de convergencia altos se obtienen desbeneficios). Para poder alcanzar dichos errores se ha implementado una opción en ESTRAUS que permite fijar las matrices de viajes por modo cuando se alcanza una convergencia a partir de la cual la partición modal permanece prácticamente constante (del orden de 0,3% para las matrices de viaje en este ejercicio) y continuar solamente con una asignación de equilibrio sobre la red multimodal.

Tabla 1
Estimación Tiempos Totales y Ahorros de Tiempo de Viajes para Distintos Niveles de los Errores de Convergencia, Período Punta Mañana, Año 2000.

		Base	Plan 1	Plan 2
$e_f = 1,0 \%$	Consumo Total (horas)	1.228.740	1.234.635	1.136.970
$e_t = 0,5 \%$	Ahorro de Tiempo (Base-Plan) [hrs]	-	-5.895	91.770
$e_f = 0,1 \%$	Consumo Total (horas)	1.229.253	1.209.964	1.122.005
$e_t = 0,3 \%$	Ahorro de Tiempo (Base-Plan) [hrs]	-	19.259	107.248
$e_f = 0,01 \%$	Consumo Total (horas)	1.215.851	1.201.951	1.098.851
$e_t = 0,3 \%$	Ahorro de Tiempo (Base-Plan) [hrs]	-	13.900	117.000

REFERENCIAS

ABDULAAL, M. y LEBLANC, L.J. (1979). Methods for combining modal split and equilibrium assignment models. *Transportation Science* 13, pp.292-214.

DE CEA, J. y FERNANDEZ, J.E. (1993). Transit assignment for congested public transport systems: an equilibrium model. *Transportation Science* 27(2), pp. 133-147.

DE CEA, J. y FERNANDEZ, J.E. (1996). Equilibrio simultáneo oferta-demanda en redes multimodales congestionadas: formulación matemática y algoritmo de solución. *Apuntes de Ingeniería* 19(4), pp. 17-30.

FERNANDEZ, J.E. y DE CEA, J. (1990). An application of equilibrium modelling to urban transport planning in developing countries: the case of Santiago de Chile. En: H.E. Bradley (ed.) *Operational Research 90*, Pergamon Press PLC.

FERNANDEZ, J.E. y FRIESZ, T.L. (1983). Equilibrium predictions in transportation markets: the state of the art. *Transportation Research B*, 17B(2), pp. 155-172.

FLORIAN, M. (1977). A traffic equilibrium model of travel by car and public transit modes. *Transportation Science* 8, pp. 16-179.

FLORIAN, M., Wu, J.H. y He, S. (1999). A multi-class multi-mode variable demand network equilibrium model with hierarchical logit structures. *IX Congreso Chileno de Ingeniería de Transporte, 18-22 Octubre 1999*, Santiago, Chile.

HARKER, P.T. y PANG, J.S. (1987). Finite-Dimensional Variational Inequality Nonlinear Complementarity Problems: A Survey of Theory, Algorithms and Applications. Report 87-12-06. The Warton School, University of Pennsylvania, 1987.

NGUYEN, S. y DUPUIS, C. (1984). An efficient method for computing traffic equilibria in networks with asymmetric transportation costs. *Transportation Science* 18, pp. 185-202.

SECTU (1989) Estudio de evaluación y desarrollo del sistema de transporte urbano de Santiago (ESTRAUS). Secretaría Ejecutiva de la Comisión de Transporte Urbano, Chile.